



Rodrigo Jorge Sol Freitas

Licenciado

Um Elemento Finito para Barras Esbeltas Baseado numa Teoria Geometricamente Exacta

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil

Orientador: Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António Manuel Pinho Ramos
Arguente: Prof. Doutor Corneliu Cismasiu
Vogal: Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Novembro 2011

“Copyright” Rodrigo Jorge Sol Freitas, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Ao professor Rodrigo Gonçalves, pelo seu apoio, disponibilidade e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, em particular aos meus pais por todo o apoio e compreensão.

A todos os meus amigos e colegas, que me acompanharam durante o percurso académico.

Resumo

Neste trabalho implementa-se uma formulação de vigas geometricamente exacta com a particularidade de o eixo da viga apenas se poder mover no plano. Assume-se que a secção transversal permanece plana e perpendicular ao eixo da viga (hipótese de Bernoulli) e, portanto, a formulação é intrinsecamente insensível à retenção por corte. Não são utilizadas quaisquer outras aproximações cinemáticas, sendo portanto esta formulação adequada para analisar problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações finitas. A correspondente implementação computacional é baseada no método dos elementos finitos, com aproximação directa dos deslocamentos nodais e respectivas derivadas. Os exemplos apresentados mostram que a formulação/implementação fornece excelentes resultados mesmo com um número reduzido de elementos finitos.

Palavras chave:

Método dos elementos finitos, elementos finitos de barra, teoria de vigas geometricamente exacta, análise geometricamente não-linear

Abstract

A Beam Finite Element for Slender Bars Based on a Geometrically Exact Theory

In this work a geometrically exact beam formulation (in-plane case) is implemented. It is assumed that plane sections remain plane and perpendicular to the beam axis (Bernoulli assumption) and, therefore, the formulation is intrinsically insensitive to shear locking. No other kinematical assumptions are employed, which means that this formulation is adequate to analyse problems involving large displacements and finite rotations. The corresponding computational implementation is based on the finite element method, with the direct approximation of the nodal displacements and corresponding derivatives. The examples presented in the text show that the formulation/implementation leads to excellent results even with a small number of finite elements.

Keywords:

Finite Element Method, beam finite elements, geometrically exact beam theory, geometrically non-linear analysis

Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Objectivos	2
1.3 Organização da Dissertação	2
1.4 Notação	2
2 Formulação geometricamente exacta de barras esbeltas	5
2.1 Introdução	5
2.2 Descrição cinemática	5
2.3 Deformação	6
2.4 Relações constitutivas	7
2.5 Equações de equilíbrio	7
2.6 Desenvolvimento das equações em termos de \mathbf{r} e respectivas derivadas e variações	8
3 Implementação	11
3.1 Introdução	11
3.2 Funções de aproximação	11
3.3 Aspectos computacionais	13
3.3.1 Integração numérica	13
3.3.2 Acerca do MATLAB	14
3.3.3 Conjunto de rotinas implementadas	14
4 Exemplos de aplicação	21
4.1 Introdução	21

Índice de Matérias

4.2	Tracção simples	22
4.3	Consola com uma força transversal	22
4.4	Consola com forças segundo X_1 e X_3	22
5	Conclusões e desenvolvimentos futuros	31
5.1	Conclusões	31
5.2	Desenvolvimentos futuros	31
	Bibliografia	33
A	Código das rotinas desenvolvidas no MATLAB	35
A.1	Processo incremental/iterativo	35
A.2	Cálculo da matriz de rigidez elementar e do vector das forças desequilibradas elementar	38
A.3	Cálculo dos deslocamentos nodais	40
A.4	Funções auxiliares	40
B	Figuras referentes ao terceiro exemplo analisado	43

Índice de Figuras

2.1	a) Configuração de referência, b) configuração inicial e c) configuração actual. . .	6
3.1	Funções de interpolação de Hermite	12
3.2	Método de Newton-Raphson.	15
3.3	Rotina principal (nl.m).	17
3.4	Sub-rotina que calcula a matriz de rigidez e o vector de forças desequilibradas (calculorq.m).	18
3.5	Sub-rotina que calcula o vector de deslocamentos (calculod.m).	19
3.6	Organização esquemática das grandezas envolvidas.	20
4.1	Viga em consola dos exemplos de aplicação.	21
4.2	Comparação entre as duas soluções para diferentes relações constitutivas.	23
4.3	Consola sujeita a força transversal: Deslocamentos do centro de gravidade da extremidade livre.	24
4.4	Configurações deformadas para uma força segundo X_1 de $F=500$ kN a $F=3000$ kN.	25
4.5	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para uma análise com 3, 5, 10 e 30 elementos finitos.	26
4.6	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para uma análise com 3, 5, 10 e 30 elementos finitos.	27
4.7	Configurações deformadas, incremento 1 a incremento 9	28
4.8	Deformadas finais para 3, 5, 10 e 30 elementos finitos	28
B.1	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 3 elementos finitos.	44
B.2	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 3 elementos finitos.	45
B.3	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 5 elementos finitos.	46
B.4	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 5 elementos finitos.	47

Índice de Figuras

B.5	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 10 elementos finitos.	48
B.6	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 10 elementos finitos.	49
B.7	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 30 elementos finitos.	50
B.8	Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 30 elementos finitos.	51

Índice de Tabelas

4.1	Sequência de aplicação das forças	25
4.2	Deslocamentos do centro de gravidade da extremidade livre (m) para a consola com forças com direcção variável	29

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Siglas

MEF Método dos Elementos finitos

Letras Latinas

$\mathbf{0}$ matriz nula

$\mathbf{1}$ tensor identidade de 2^a ordem

\mathbf{d} vector de deslocamentos nodais

E módulo de elasticidade

\mathbf{E} tensor de deformação de Green-Lagrange

\mathbf{f} vector de forças nodais

F_1 força perpendicular ao eixo da viga

F_3 força axial

\mathbf{F} gradiente de deformação

\mathbf{g} vector de forças desequilibradas

h dimensão da secção transversal

\mathbf{H} tensor de deformação de Simo (1985)

I momento de inércia

\mathbf{K}_t matriz de rigidez total

L comprimento do elemento

\mathbf{L} vector bidimensional na secção transversal que referencia a posição de um ponto

P_{33} tensão conjugada de H_{33}

\mathbf{r} vector de posição do centro da secção transversal

\mathbf{S} segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff

\mathbf{t} vector unitário tangente a \mathbf{r}

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

\mathbf{u} deslocamento do eixo da viga entre a configuração de referência e a configuração actual

V volume do elemento

\mathbf{x} vector que referencia a posição de um ponto material na configuração actual

\mathbf{x}_0 vector que referencia a posição de um ponto material na configuração inicial

\mathbf{X} vector que referencia a posição de um ponto material na configuração de referência

Letras Gregas

δ variação virtual

δW trabalho virtual

δW_{ext} trabalho virtual das forças exteriores

δW_{int} trabalho virtual das forças interiores

Δ variação incremental ou iterativa

ε extensão do eixo da barra

κ curvatura

$\mathbf{\Lambda}$ tensor de rotação

ν coeficiente de Poisson

Ψ matriz das funções de aproximação

Ω área da secção transversal

Operações matemáticas

\times produto externo entre dois vectores

\cdot produto interno entre dois vectores

\otimes produto tensorial entre dois vectores

Operadores matemáticos e índices

$(\)_t$ tangente

$(\)_e$ referente a um elemento

$(\)'$ derivada em ordem a X_3

$\| \ \|$ norma de um vector ou tensor

$(\)^t$ transposto

$(\widetilde{\ })$ tensor anti-simétrico de um vector

Ξ_D tensor associado a uma derivada direccional

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

Uma peça linear (barra) é um corpo em que uma dimensão (o comprimento da barra) é muito superior às restantes. Nos modelos estruturais mais simples para barras, estas são definidas por uma linha (curva ou recta) representando o seu *eixo* e o conjunto das suas secções transversais (figuras que se obtêm intersectando a peça linear com um plano perpendicular ao eixo, num determinado ponto do eixo). Consequentemente, neste tipo de modelos, é de todo vantajoso caracterizar o comportamento estrutural a partir de grandezas que são apenas função da posição do ponto do eixo considerado (como os esforços), ou seja, grandezas que assumem um carácter *unidimensional*. Os modelos de barra unidimensionais (envolvendo apenas variáveis unidimensionais) são particularmente adequados para analisar o comportamento estrutural de estruturas reticuladas (e.g., pontes e edifícios). Este facto, aliado à sua relativa simplicidade, está na base da sua enorme popularidade.

As teorias de vigas ditas *geometricamente exactas* devem a sua designação ao facto de serem válidas independentemente da magnitude dos deslocamentos e rotações envolvidos. Os trabalhos pioneiros nesta área devem-se a Reissner (1972), que abordou o caso plano, e a Simo (1985), que generalizou a teoria para o caso espacial. Posteriormente, foram decisivas as contribuições de Simo e Vu-Quoc (1986), que desenvolveram as primeiras implementações computacionais por elementos finitos baseados numa teoria geometricamente exacta, Cardona e G  radin (1988), ao utilizarem um vector de rota  o para representar as rota  es incrementais entre a   ltima configura  o de equil  brio e a configura  o actual, ou as rota  es totais, entre a orienta  o material e a orienta  o actual, Simo e Vu-Quoc (1991), ao formularem elementos finitos que incluem a considera  o de uma fun  o de empenamento de tor  o, Ibrahimbegovi   et al. (1995), que obtiveram a lineariza  o completa da parametriza  o vectorial de uma teoria geometricamente exacta, Kapania e Li (2003a, b), que estabeleceram leis constitutivas para vigas curvas, e Zupan e Saje (2004), ao formularem um elemento finito que assenta num esquema de interpola  o de deforma  es. Finalmente, Gon  alves et al. (2010) apresentaram uma formula  o para vigas de parede fina com sec  o deform  vel, que foi posteriormente melhorada atrav  s da inclus  o de tensores de rota  o adicionais que consideram a rota  o relativa das paredes (Gon  alves et al, 2011).

1.2 Objectivos

O principal objectivo deste trabalho consiste na implementação de um elemento finito baseado numa formulação de vigas geometricamente exacta (caso plano), considerando grandes deslocamentos e rotações finitas. Em particular, pretende-se que este trabalho contribua para uma divulgação deste tipo de teorias e sirva como um ponto de partida para desenvolvimentos futuros, utilizando o programa desenvolvido.

No campo das hipóteses simplificativas estritamente cinemáticas, admite-se que o movimento ocorre apenas no plano e que é válida a hipótese de Bernoulli, segundo a qual a secção transversal se mantém rígida e perpendicular ao eixo da viga após deformação. Essencialmente, a formulação implementada é equivalente à que foi proposta por Boyer e Primault (2004) (embora esta também seja aplicável ao caso espacial), mas, como foi desenvolvida independentemente, as expressões são algo diferentes.

A hipótese de Bernoulli implica que a configuração deformada é completamente definida a partir da configuração do eixo da barra e, portanto, a rotação das secções transversais também depende unicamente da configuração do eixo. Por outro lado, implica que a deformação por corte é nula e, por isso, o elemento finito implementado é intrinsecamente insensível ao fenómeno de retenção por corte. Naturalmente, o elemento finito proposto não é adequado para estudar problemas em que a deformação por corte influencia significativamente o comportamento estrutural.

1.3 Organização da Dissertação

No Capítulo II descreve-se a formulação a implementar. Começa-se pela descrição cinemática da viga e a análise das relações constitutivas, prosseguindo com a escrita das equações de equilíbrio e o desenvolvimento das equações previamente obtidas em termos do vector \mathbf{r} (e respectivas derivadas/variações), os quais serão directamente aproximados no contexto do método dos elementos finitos.

O Capítulo III apresenta a implementação computacional da formulação anteriormente apresentada, descrevendo as suas principais características.

No Capítulo IV apresenta-se um conjunto de exemplos de validação. Abordam-se vigas metálicas em consola, sujeitas a três tipos de carregamento, todos aplicados na extremidade livre. Para efeitos de comparação, são utilizados resultados obtidos com o elemento finito de barra incluído no programa ADINA (Bathe, 2011).

No Capítulo V descrevem-se as conclusões e os desenvolvimentos futuros.

1.4 Notação

De forma a representar as várias grandezas que compõem as equações utiliza-se a notação directa e pontualmente a notação indicial. As quantidades escalares são representadas por letras minúsculas ou maiúsculas em *itálico*. Os vectores e as matrizes/tensores de 2ª ordem são representados por letras minúsculas ou letras maiúsculas em **negrito**. As variações virtuais são representadas pelo símbolo $\ll \delta \gg$ e para as variações incrementais/iterativas utiliza-se o símbolo $\ll \Delta \gg$. A derivada parcial em ordem a X_3 é representada por $\ll ' \gg$.

O conjunto de expressões a serem desenvolvidas requerem vários conceitos fundamentais de álgebra tensorial. Seguidamente apresenta-se a notação utilizada nas operações matemáticas. O produto interno entre dois vectores é definido por $\ll \cdot \gg$, o produto tensorial é dado por

$\ll \otimes \gg$, o produto externo de dois vectores é representado por $\ll \times \gg$ e a norma associada a um vector genérico \mathbf{u} é representada por $\ll \| \mathbf{u} \| \gg$. A *transformação identidade* é dada por $\mathbf{1}$ e a *transformação nula* por $\mathbf{0}$. Também é necessário definir um tensor anti-simétrico associado a um vector \mathbf{u} , definido por $\tilde{\mathbf{u}}$. As componentes de $\tilde{\mathbf{u}}$ são dadas por

$$[\tilde{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Capítulo 2

Formulação geometricamente exacta de barras esbeltas

2.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a formulação que será implementada. Começa-se com a descrição cinemática da viga, obtêm-se as medidas de deformação, introduzem-se as relações constitutivas e, por fim, escrevem-se as equações de equilíbrio e correspondente linearização. Seguidamente, as equações previamente obtidas são desenvolvidas em termos do vector de posição \mathbf{r} e respectivas derivadas e variações, dado que o elemento finito é baseado na sua aproximação directa.

2.2 Descrição cinemática

Antes de apresentar a descrição cinemática da viga é necessário definir três configurações diferentes, a configuração de referência, a configuração inicial e a configuração actual (ver figura 2.1). A configuração de referência representa a viga de forma fictícia, correspondendo a um estado geometricamente simples, sendo que, em relação a um referencial ortonormado directo de eixos (X_1, X_2, X_3) com vectores de base \mathbf{E}_i ($i = 1, 2, 3$), X_1 é perpendicular ao eixo da peça e X_3 é coincidente com o eixo da peça. A configuração inicial corresponde à configuração em que o carregamento é aplicado, e a partir da qual a deformação é medida. Por fim, a configuração actual corresponde à configuração obtida durante a aplicação do carregamento. Admite-se ainda que o eixo da peça está sempre contido no plano $X_2 = 0$ e que o referencial tem origem O na extremidade esquerda do elemento, ou seja, em $X_3 = 0$.

Assim, a posição de um ponto genérico da viga na configuração de referência é dada por

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3. \quad (2.1)$$

Na configuração actual (a configuração inicial é definida de seguida, dado que pode ser encarada como um caso particular desta configuração) tem-se antes

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{r} é um vector que referencia a posição do eixo do elemento (com a componente r_2 nula visto que o movimento ocorre no plano $X_2 = 0$), $\mathbf{\Lambda}$ é o tensor de rotação da secção transversal e \mathbf{L} é um vector que referencia a posição do ponto na secção transversal, sendo dado por

$$\mathbf{L} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2. \quad (2.3)$$

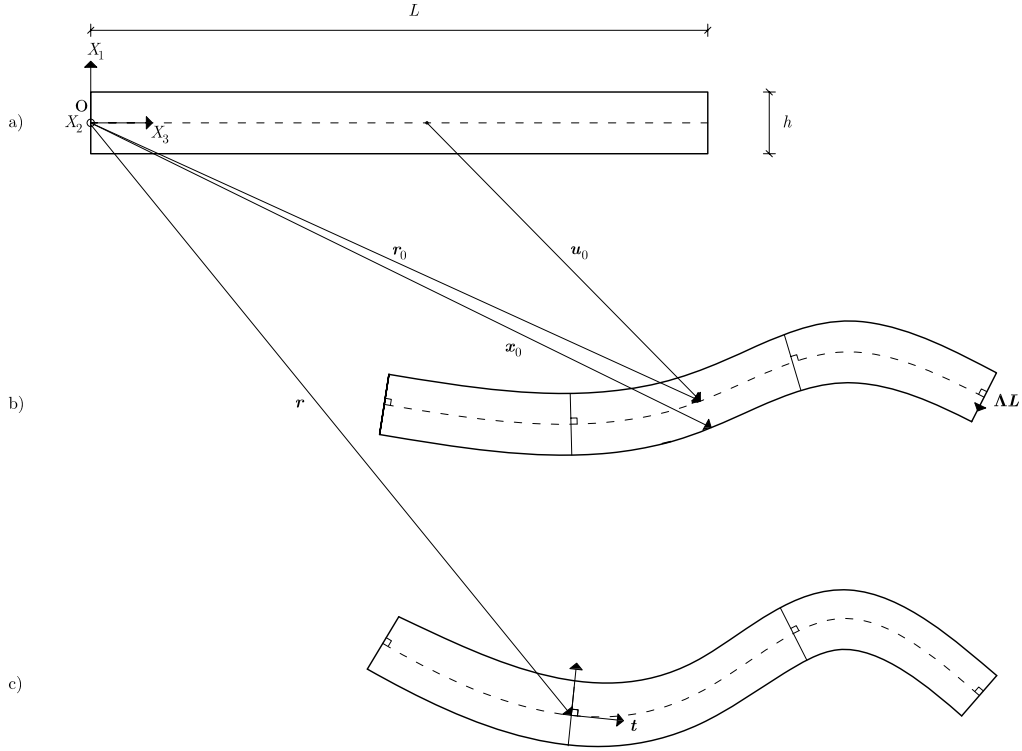


Figura 2.1: a) Configuração de referência, b) configuração inicial e c) configuração actual.

A partir da hipótese de Bernoulli, \mathbf{L} permanece perpendicular à tangente ao eixo da viga, cujo versor \mathbf{t} é dado por

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}. \quad (2.4)$$

Assim, o tensor de rotação $\mathbf{\Lambda}$ só depende do vector tangente à curva \mathbf{t} e dos vectores \mathbf{E}_i ($i = 1, 2, 3$), ou seja,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{t} \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}) \otimes \mathbf{E}_1. \quad (2.5)$$

Finalmente, a configuração inicial é imediatamente definida por

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{L}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{t}_0 \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}_0) \otimes \mathbf{E}_1. \quad (2.7)$$

2.3 Deformação

O gradiente de deformação \mathbf{F} entre a configuração de referência e a configuração actual é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{x}' \otimes \mathbf{E}_3 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \otimes \mathbf{E}_2 \\ &= (\mathbf{r}' + \mathbf{\Lambda}' \mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aplicando uma rotação Λ^t ao gradiente de deformação tem-se

$$\begin{aligned}\Lambda^t \mathbf{F} &= (\Lambda^t \mathbf{r}' + \Lambda^t \Lambda' \mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \\ &= (\Lambda^t \mathbf{r}' + \mathbf{K} \times \mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2,\end{aligned}\quad (2.9)$$

onde se teve em conta que $\Lambda^t \Lambda'$ é uma matriz anti-simétrica, cujo vector axial foi designado por \mathbf{K} , com $[\mathbf{K}]^t = [0 \ \kappa \ 0]$ (o movimento é plano) e

$$\kappa = (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}' \quad (2.10)$$

O tensor de deformação de Simo (1985) é dado por

$$\mathbf{H} = \Lambda^t \mathbf{F} - \Lambda_0^t \mathbf{F}_0. \quad (2.11)$$

Contudo, apenas se desenvolvem as expressões para o caso particular da configuração inicial coincidir com a configuração de referência. Nesse caso $\Lambda_0^t \mathbf{F}_0 = \mathbf{1}$ e, tendo em conta as expressões anteriores, obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \Lambda^t \mathbf{F} - \mathbf{1} \\ &= (\Lambda^t \mathbf{r}' + \mathbf{K} \times \mathbf{L} - \mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= (\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}' - \kappa X_1 - 1) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= (\|\mathbf{r}'\| - \kappa X_1 - 1) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3,\end{aligned}\quad (2.12)$$

o que mostra que apenas uma componente de deformação é não-nula (H_{33}). O termo $\|\mathbf{r}'\| - 1$ corresponde à extensão do eixo ε , ou seja,

$$\varepsilon = \|\mathbf{r}'\| - 1. \quad (2.13)$$

Finalmente, a componente de deformação não-nula escreve-se como

$$H_{33} = \varepsilon - \kappa X_1. \quad (2.14)$$

2.4 Relações constitutivas

Admite-se uma relação linear entre H_{33} e o respectivo par conjugado, que se designa por P_{33} . Assim, a relação constitutiva (uniaxial) é dada por

$$P_{33} = E H_{33}, \quad (2.15)$$

onde E designa o módulo de elasticidade do material. Conforme se verá, esta hipótese terá implicações nos resultados fornecidos pela formulação.

2.5 Equações de equilíbrio

A forma variacional do equilíbrio é dada por

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0, \quad (2.16)$$

onde δW_{int} representa o trabalho virtual das forças interiores e δW_{ext} o trabalho virtual das forças exteriores. O trabalho virtual das forças interiores é obtido através de

$$\delta W_{int} = - \int_V P_{33} \delta H_{33} \, dV, \quad (2.17)$$

com as integrações feitas em relação ao volume da viga na configuração de referência V . Desenvolve-se esta expressão recorrendo às equações previamente obtidas, fornecendo

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= - \int_V E H_{33} \delta H_{33} dV \\ &= - \int_V E (\varepsilon - \kappa X_1) (\delta \varepsilon - \delta \kappa X_1) dV \\ &= - \int_0^L \int_\Omega E (\varepsilon \delta \varepsilon - \varepsilon \delta \kappa X_1 - \kappa \delta \varepsilon X_1 + \kappa \delta \kappa X_1^2) d\Omega dX_3,\end{aligned}\quad (2.18)$$

onde L é o comprimento da viga e Ω representa a área da secção transversal, na configuração de referência. Admitindo que X_1 e X_2 são eixos centrais principais da secção transversal, a expressão anterior simplifica-se para

$$\delta W_{int} = - \int_0^L (E\Omega \varepsilon \delta \varepsilon + EI \kappa \delta \kappa) dX_3. \quad (2.19)$$

A linearização da expressão do trabalho das forças interiores na direcção de uma variação incremental/iterativa genérica, Δ , é dada por

$$\Delta \delta W_{int} = - \int_0^L (E\Omega (\Delta \varepsilon \delta \varepsilon + \varepsilon \Delta \delta \varepsilon) + EI (\Delta \kappa \delta \kappa + \kappa \Delta \delta \kappa)) dX_3. \quad (2.20)$$

Admitindo que o carregamento consiste apenas em forças \mathbf{f} , distribuídas ao longo do eixo da viga (e com $f_2 = 0$), o trabalho virtual das forças exteriores é dado por

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dX_3 = \int_0^L \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dX_3, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{r} - X_3 \mathbf{E}_3$ é o deslocamento do eixo da viga entre a configuração de referência e a configuração actual e, portanto, $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{r}$. Por fim, a respectiva linearização incremental/iterativa é

$$\Delta \delta W_{ext} = \int_0^L \Delta \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dX_3. \quad (2.22)$$

2.6 Desenvolvimento das equações em termos de \mathbf{r} e respectivas derivadas e variações

Com vista à implementação computacional, procede-se ao desenvolvimento das expressões previamente obtidas em termos de \mathbf{r} e respectivas variações/derivadas, dado que são as variáveis a aproximar no contexto do Método dos Elementos Finitos (Capítulo 3).

As variações do vector \mathbf{t} são dadas por

$$\delta \mathbf{t} = \Xi_{Dt} \delta \mathbf{r}', \quad (2.23)$$

$$\Delta \delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}' \cdot \delta \mathbf{r}', \quad (2.24)$$

onde \mathbf{a} é um vector genérico (o qual será utilizado doravante) e os tensores associados às derivadas do vector \mathbf{t} são dados por

$$\Xi_{Dt} = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad (2.25)$$

$$\Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) = - \frac{1}{\|\mathbf{r}'\|} (\Xi_{Dt}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})) \Xi_{Dt}). \quad (2.26)$$

2.6. Desenvolvimento das equações em termos de \mathbf{r} e respectivas derivadas e variações

As expressões da derivada do vector tangente \mathbf{t}' e das respectivas variações podem ser escritas da seguinte forma

$$\mathbf{t}' = \Xi_{Dt} \mathbf{r}'' \quad (2.27)$$

$$\delta \mathbf{t}' = \delta \Xi_{Dt} \mathbf{r}'' + \Xi_{Dt} \delta \mathbf{r}'' = \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') \delta \mathbf{r}' + \Xi_{Dt} \delta \mathbf{r}'' \quad (2.28)$$

$$\Delta \delta \mathbf{t}' \cdot \mathbf{a} = \delta \mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^3t}(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}' + \Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}' \cdot \delta \mathbf{r}'' + \Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) \delta \mathbf{r}' \cdot \Delta \mathbf{r}'' \quad (2.29)$$

Neste caso, para além dos tensores auxiliares já definidos, tem-se

$$\begin{aligned} \Xi_{D^3t}(\mathbf{a}) = & -\frac{1}{\|\mathbf{r}'\|} (\Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') \mathbf{a} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{a} \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}') \Xi_{Dt} + \\ & + \Xi_{Dt}(\mathbf{r}'' \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}'') \Xi_{Dt} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') + (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{t}) \Xi_{D^2t}(\mathbf{a})). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Com estes resultados pode-se escrever as medidas de deformação (ε e κ) e respectivas variações em função de \mathbf{r} e respectivas variações/derivadas. Com vista a facilitar a implementação computacional, tendo em conta que os resultados dependem apenas das variações de \mathbf{r}' e \mathbf{r}'' procede-se à obtenção de matrizes auxiliares Ξ que respeitam

$$\delta a = \Xi_{Da} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\Delta \delta a = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}^t \Xi_{D^2a} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}' \\ \Delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

e, portanto, com dimensão 1×6 no caso de primeiras variações e 6×6 no caso de segundas variações.

Assim, a extensão da barra ε e respectivas variações podem agora ser exprimidas por

$$\delta \varepsilon = \Xi_{D\varepsilon} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\Delta \delta \varepsilon = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}^t \Xi_{D^2\varepsilon} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}' \\ \Delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

com

$$[\Xi_{D\varepsilon}] = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ \|\mathbf{r}'\| \end{bmatrix}^t \quad [\mathbf{0}_{1 \times 3}] \right], \quad (2.35)$$

$$[\Xi_{D^2\varepsilon}] = \left[\begin{bmatrix} \frac{(1-\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})}{\|\mathbf{r}'\|} \\ [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \\ [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \right]. \quad (2.36)$$

No caso da curvatura κ , partindo da expressão (2.10), obtêm-se

$$\begin{aligned} \delta \kappa &= (\mathbf{E}_2 \times \delta \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}' + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{t}' \\ &= \Xi_{D\kappa} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\Delta \delta \kappa = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}^t \Xi_{D^2\kappa} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}' \\ \Delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

com

$$[\Xi_{D\kappa}] = \left[\left[[-\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}']^t [\Xi_{Dt}] + [\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}]^t [\Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'')] \right] \left[[\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}]^t [\Xi_{Dt}] \right] \right], \quad (2.39)$$

$$[\Xi_{D^2\kappa}] = \left[\begin{array}{c} \Xi_{D^2t}(-\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}') + \\ + \Xi_{Dt}(-\widetilde{\mathbf{E}}_2) \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') + \\ + \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') \widetilde{\mathbf{E}}_2 \Xi_{Dt} + \Xi_{D^3t}(\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}) \\ [Sim.] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} [\Xi_{D^2t}(\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t})] \\ [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \end{array} \right]. \quad (2.40)$$

No entanto, o termo $\Xi_{D^2t}(-\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}') + \Xi_{Dt}(-\widetilde{\mathbf{E}}_2) \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'')$ pode ser eliminado visto que o seu resultado só depende da componente dos deslocamentos segundo X_2 que é nula no caso plano. Assim, obtém-se

$$[\Xi_{D^2\kappa}] = \left[\begin{array}{c} \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') \widetilde{\mathbf{E}}_2 \Xi_{Dt} + \Xi_{D^3t}(\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t}) \\ [Sim.] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} [\Xi_{D^2t}(\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{t})] \\ [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \end{array} \right]. \quad (2.41)$$

Finalmente, aplicando os desenvolvimentos previamente obtidos na expressão do trabalho virtual das forças interiores (2.19), resulta em

$$\delta W_{int} = - \int_0^L \left[\begin{array}{c} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{array} \right]^t (E\Omega \varepsilon \Xi_{D\varepsilon}^t + EI \kappa \Xi_{D\kappa}^t) dX_3 \quad (2.42)$$

Da mesma forma, desenvolvendo a expressão (2.20) e aplicando as quantidades anteriormente calculadas, obtém-se

$$\Delta \delta W_{int} = - \int_0^L \left[\begin{array}{c} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{array} \right]^t (E\Omega (\Xi_{D\varepsilon} \Xi_{D\varepsilon}^t + \varepsilon \Xi_{D^2\varepsilon}) + EI (\Xi_{D\kappa} \Xi_{D\kappa}^t + \kappa \Xi_{D^2\kappa})) \left[\begin{array}{c} \Delta \mathbf{r}' \\ \Delta \mathbf{r}'' \end{array} \right] dX_3. \quad (2.43)$$

No caso do trabalho virtual das forças exteriores, note-se que as equações (2.21)–(2.22) já estão escritas em termos de $\delta \mathbf{r}$.

Capítulo 3

Implementação

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta a implementação da formulação desenvolvida no Capítulo 2. São discutidos os aspectos relacionados com a aproximação do vector \mathbf{r} , a integração numérica e o procedimento de resolução incremental/iterativo, detalhando o método de determinação da matriz de rigidez tangente e do vector de forças equivalentes e a consequente obtenção dos deslocamentos, deformações e esforços.

Analisa-se também a programação propriamente dita, necessária à implementação do elemento finito, clarificando alguns aspectos relativos à linguagem utilizada.

3.2 Funções de aproximação

A aproximação do vector \mathbf{r} é obtida multiplicando uma matriz de funções de aproximação $\boldsymbol{\psi}$ pelo vector de deslocamentos nodais \mathbf{d} , ou seja,

$$[\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\psi}][\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Para assegurar as condições de compatibilidade é necessário que as funções de aproximação sejam contínuas de primeira derivada contínua. Adoptam-se polinómios cúbicos de Hermite (ver figura 3.1), os quais são dados por

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 2 \left(\frac{X_3}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{X_3}{L} \right)^2 + 1, \\ \psi_2 &= L \left(\frac{X_3}{L} \right)^3 - 2 \left(\frac{X_3}{L} \right)^2 + \frac{X_3}{L}, \\ \psi_3 &= -2 \left(\frac{X_3}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{X_3}{L} \right)^2, \\ \psi_4 &= L \left(\frac{X_3}{L} \right)^3 - \left(\frac{X_3}{L} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde L designa o comprimento do elemento finito.

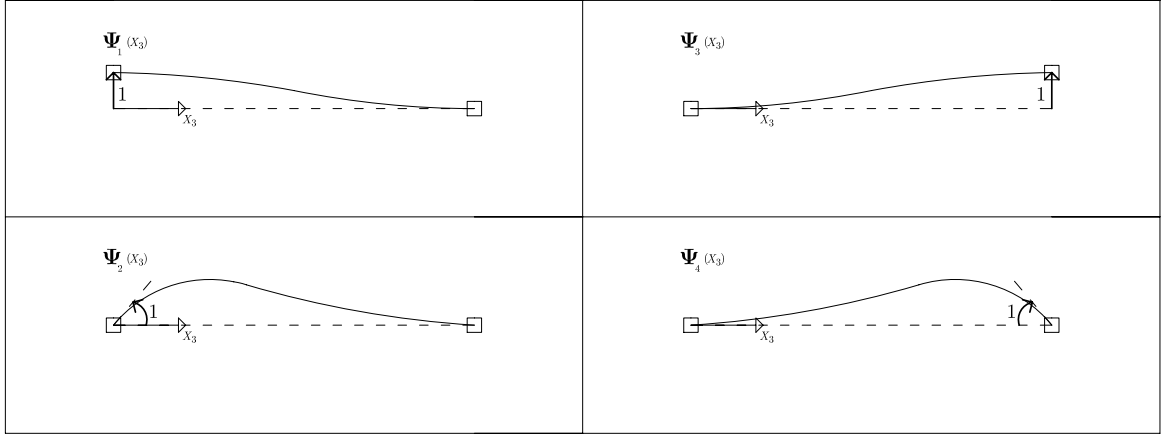


Figura 3.1: Funções de interpolação de Hermite

Assim, a matriz de funções de aproximação é dada por

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

com o vector de deslocamentos

$$[\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Os primeiros quatro deslocamentos nodais pertencem ao nó $X_3 = 0$ e os quatro deslocamentos seguintes ao nó $X_3 = L$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(0) \\ r_1'(0) \\ r_3(0) \\ r_3'(0) - 1 \\ r_1(L) \\ r_1'(L) \\ r_3(L) - L \\ r_3'(L) - 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Para aproximar a derivada do vector de posição \mathbf{r} é necessário derivar a equação (3.1) em ordem a X_3 , obtendo-se

$$[\mathbf{r}'] = [\psi'][\mathbf{d}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

com

$$[\psi'] = \begin{bmatrix} \psi'_1 & \psi'_2 & 0 & 0 & \psi'_3 & \psi'_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi'_1 & \psi'_2 & 0 & 0 & \psi'_3 & \psi'_4 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Da mesma maneira, a segunda derivada do vector de posição \mathbf{r} é dada por

$$\mathbf{r}'' = \psi'' \mathbf{d}, \quad (3.8)$$

com

$$[\psi''] = \begin{bmatrix} \psi''_1 & \psi''_2 & 0 & 0 & \psi''_3 & \psi''_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi''_1 & \psi''_2 & 0 & 0 & \psi''_3 & \psi''_4 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

As variações do vector de posição e respectivas derivadas são dadas por

$$\delta \mathbf{r} = \psi \delta \mathbf{d} \quad (3.10)$$

$$\delta \mathbf{r}' = \psi' \delta \mathbf{d} \quad (3.11)$$

$$\delta \mathbf{r}'' = \psi'' \delta \mathbf{d} \quad (3.12)$$

Finalmente, recorrendo a (2.21), (2.42) e (2.43), obtêm-se as expressões do vector das forças desequilibradas e da matriz de rigidez tangente elementar,

$$\mathbf{g} = - \int_0^L \Psi^t (E\Omega \varepsilon_{D\varepsilon}^t + EI\kappa_{D\kappa}^t) dX_3 + \int_0^L \psi^t \mathbf{f} dX_3 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{K}_t = \int_0^L \Psi^t (E\Omega (\Xi_{D\varepsilon}^t \Xi_{D\varepsilon} + \varepsilon \Xi_{D^2\varepsilon}) + EI (\Xi_{D\kappa}^t \Xi_{D\kappa} + \kappa \Xi_{D^2\kappa})) \Psi dX_3, \quad (3.14)$$

com

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

3.3 Aspectos computacionais

3.3.1 Integração numérica

O cálculo dos integrais presentes nas equações (3.13) e (3.14) é efectuado recorrendo a uma integração numérica com a regra de quadratura de Gauss. Para n pontos de integração, a expressão genérica da quadratura de Gauss é dada por

$$J = \sum_{i=1}^n W_i f(P_i), \quad (3.16)$$

sendo J o valor do integral a calcular, $f(x)$ a função a integrar, W_i o peso associado ao ponto i , e P_i a respectiva posição. Esta regra integra exactamente polinómios de grau p se o número de pontos de Gauss utilizados forem iguais ou superiores a $n = (p + 1)/2$.

Tendo em conta que se utilizam polinómios cúbicos de Hermite, na hipótese das pequenas deformações os termos de grau mais elevado provêm do termo $\varepsilon \delta \varepsilon$ em (2.19) (4º grau) e, portanto, a sua integração exacta requer 3 pontos de integração. Este número será também utilizado para o caso geometricamente não-linear, para mitigar os efeitos de retenção de membrana (recorde-se que a presente formulação não é afectada pela retenção de corte).

3.3.2 Acerca do MATLAB

A formulação é implementada no programa de computação numérica MATLAB (The MathWorks Inc., 2011). A escolha deste *software*, em detrimento de programas baseados em linguagens de programação compiladas (C, C++, Pascal, entre outras), normalmente mais rápidas, deve-se ao facto de apresentar um conjunto de vantagens que se adequam ao presente trabalho. Em particular, o MATLAB contém um conjunto extenso de rotinas que permitem resolver eficientemente operações com matrizes e, por outro lado, possibilita a criação de gráficos e a interacção com estes. Por exemplo, a existência de comandos pré-definidos para calcular produtos exteriores, determinantes, inversas e transpostas, facilita significativamente a programação. Quanto aos pontos negativos, nomeadamente a menor velocidade de cálculo e a maior necessidade de memória, podem ser minimizados com uma correcta implementação das operações matemáticas, associada a uma correcta utilização da função *sparse* (Zlotnik e Díez, 2010). Tendo em conta que em todos os exemplos analisados o tempo despendido em cada iteração não é significativo (na ordem de um a dois segundos), pode afirmar-se que as desvantagens inerentes à utilização do MATLAB não têm um impacto significativo no desempenho do programa implementado.

3.3.3 Conjunto de rotinas implementadas

Nesta secção as rotinas implementadas são descritas e são fornecidos fluxogramas esquemáticos. A análise destes fluxogramas deve ser feita em conjunto com o respectivo código, que se apresenta no Anexo A, visto que alguns dos termos são retirados directamente do código.

Em termos esquemáticos, o programa procede à execução dos seguintes passos:

1. Definição dos vectores iniciais de deslocamento e de forças nodais

$$\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

2. Incremento do carregamento $\Delta \mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}. \quad (3.19)$$

3. Cálculo da matriz de rigidez elementar e a assemblagem da matriz de rigidez total \mathbf{K}_t

4. Actualização do vector de deslocamentos

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{f}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}. \quad (3.21)$$

5. Cálculo do vector de forças desequilibradas \mathbf{g} e verificação da convergência. No caso de não existir convergência a correcção é dada por

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{g} \quad (3.22)$$

e regressa-se ao passo 3, caso contrário procede-se ao próximo incremento de carga (passo 2).

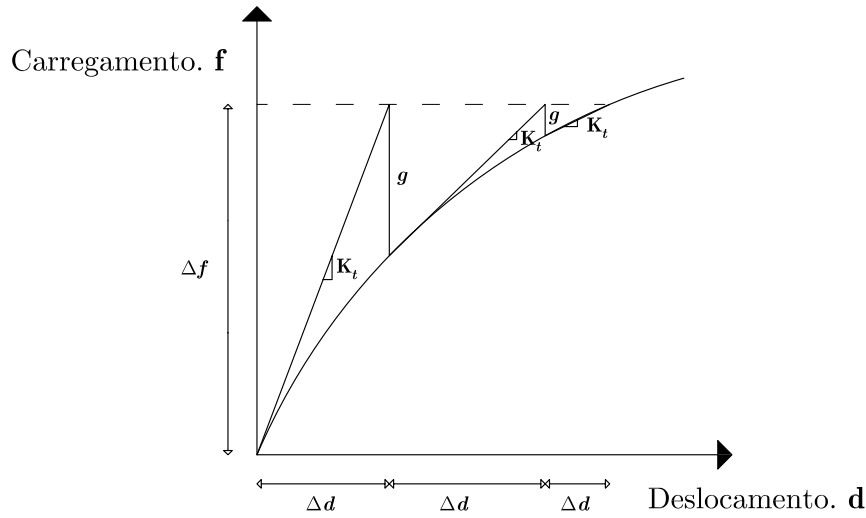


Figura 3.2: Método de Newton-Raphson.

Este algoritmo de resolução de problemas não lineares (passos 3 a 5) é conhecido por *método de Newton-Raphson* (ver figura 3.2).

As principais rotinas implementadas são:

- Inicialização – é necessário definir um conjunto de propriedades geométricas, propriedades materiais, as condições de apoio e as forças aplicadas. Também é necessário definir a discretização do problema (número de elementos e respectivos comprimentos).
- Processo incremental/iterativo – trata-se da rotina principal (nl.m – ver figura 3.3), a qual controla todo o processo de cálculo. É a partir desta rotina que se iniciam as sub-rotinas referentes ao cálculo da matriz de rigidez/vector das forças desequilibradas e do cálculo do vector de deslocamentos. Possibilita o cálculo da trajectória de equilíbrio. No final de cada iteração actualizam-se as variáveis, calcula-se a nova matriz de rigidez tangente, o vector das forças desequilibradas e verifica-se a convergência através da norma deste vector. Quando o critério de convergência é satisfeito aplica-se um novo incremento, iniciando outra vez o processo iterativo.
- Cálculo da matriz de rigidez elementar e do vector das forças desequilibradas elementar – (calculorq.m – ver figura 3.4) nesta sub-rotina da rotina anterior calculam-se todas as grandezas auxiliares para cada um dos elementos finitos e pontos de integração, de forma a obter a matriz de rigidez tangente elementar e o vector das forças desequilibradas elementar.
- Assemblagem da matriz de rigidez total e do vector das forças desequilibradas – após o cálculo de cada matriz de rigidez elementar é necessário efectuar a correspondência entre as componentes de rigidez da matriz elementar e as componentes de rigidez da matriz global, tendo em conta os graus de liberdade das duas matrizes e a sobreposição de graus de liberdade.
- Introdução das condições de apoio – após a obtenção da matriz de rigidez total e do vector das forças desequilibradas é necessário eliminar os graus de liberdade restringidos devido às condições de apoio.

- Determinação e representação gráfica dos resultados – (calculod.m, ver figura 3.5) nesta rotina calculam-se e representa-se graficamente os deslocamento obtidos.

A rotina que determina a matriz de rigidez tangente e o vector de forças desequilibradas envolve um numero considerável de cálculos auxiliares intermédios. De forma a otimizar o tempo de cálculo é necessário organizar hierarquicamente as grandezas envolvidas. A figura 3.6 representa a organização hierárquica adoptada na determinação da matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t e do vector de das forças desequilibradas \mathbf{g} . Por uma questão de simplificação esquemática, representa-se apenas a ligação (\rightarrow) entre a ultima quantidade que condiciona o cálculo e a grandeza sucessiva.

3.3. Aspectos computacionais

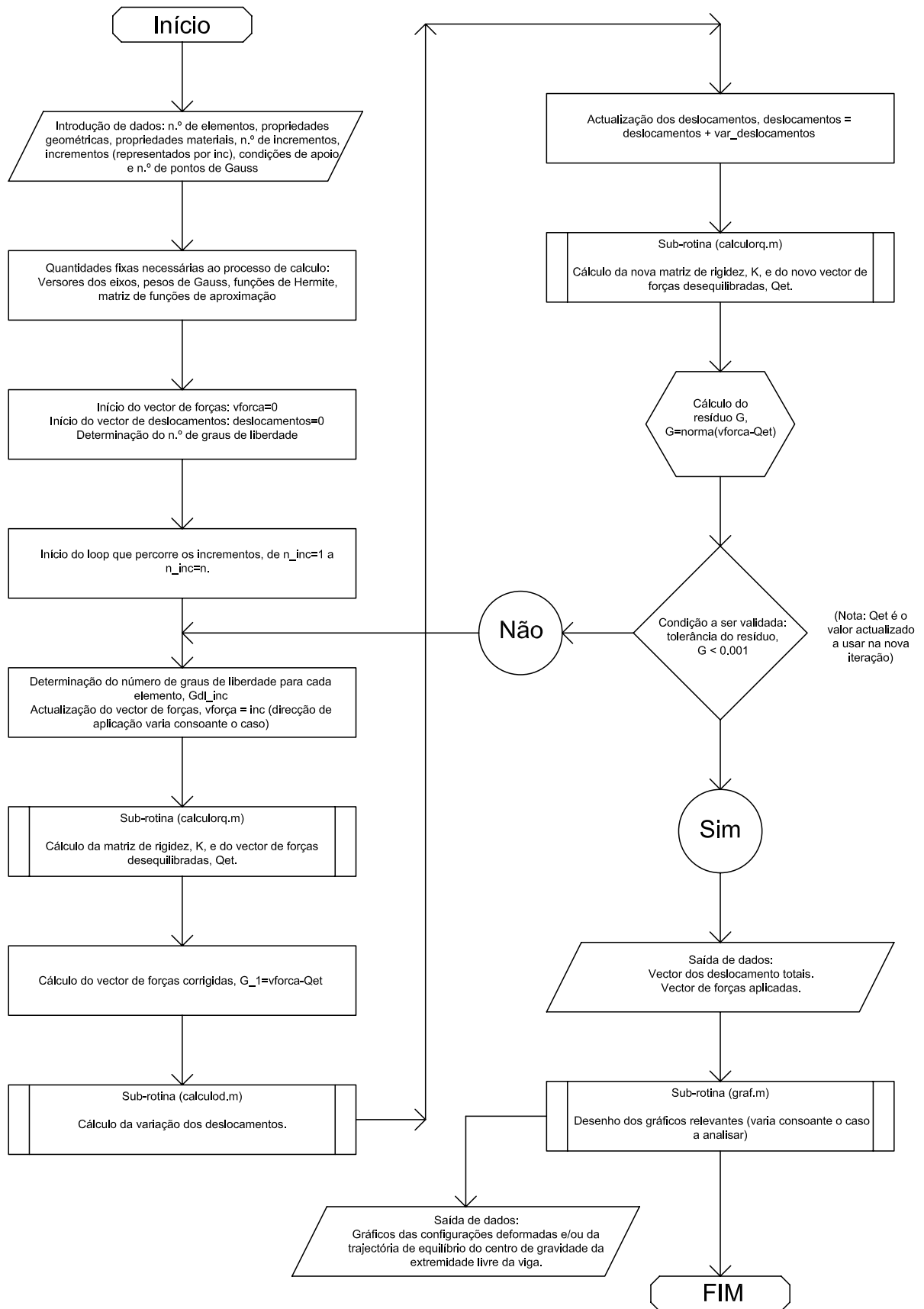


Figura 3.3: Rotina principal (nl.m).

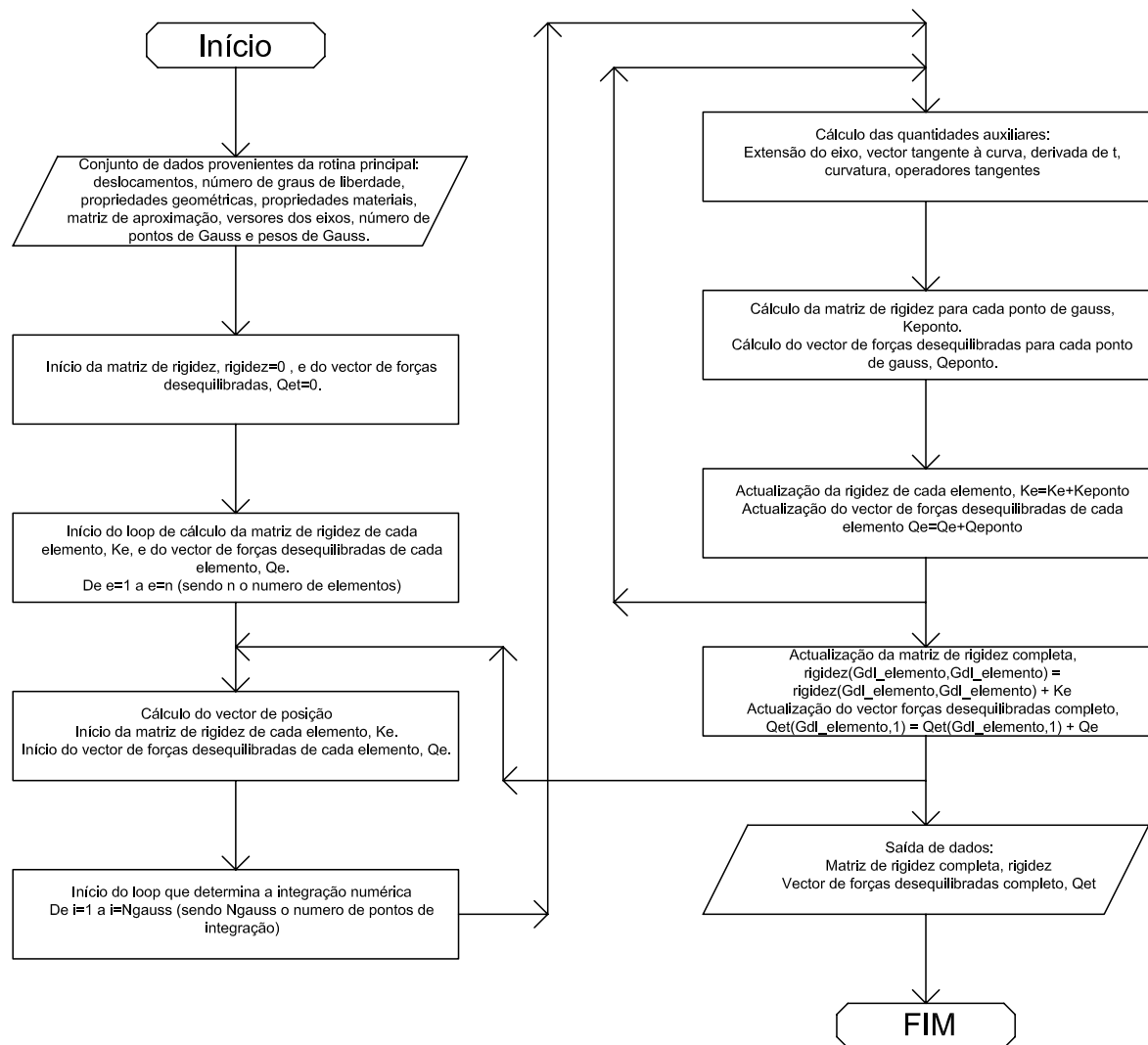


Figura 3.4: Sub-rotina que calcula a matriz de rigidez e o vector de forças desequilibradas (calculorq.m).

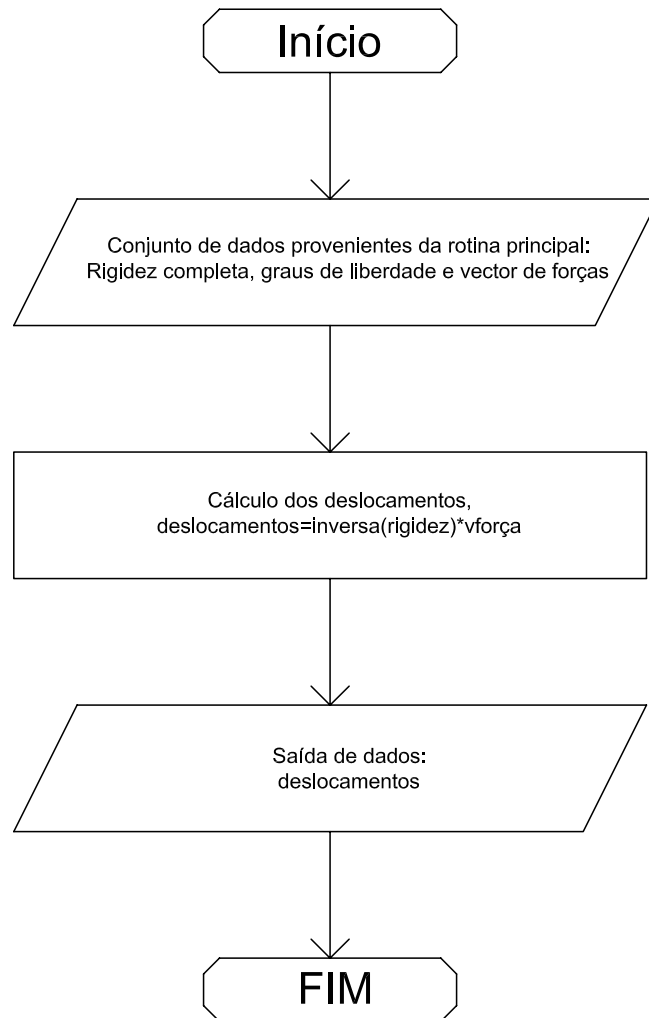


Figura 3.5: Sub-rotina que calcula o vector de deslocamentos (calculod.m).

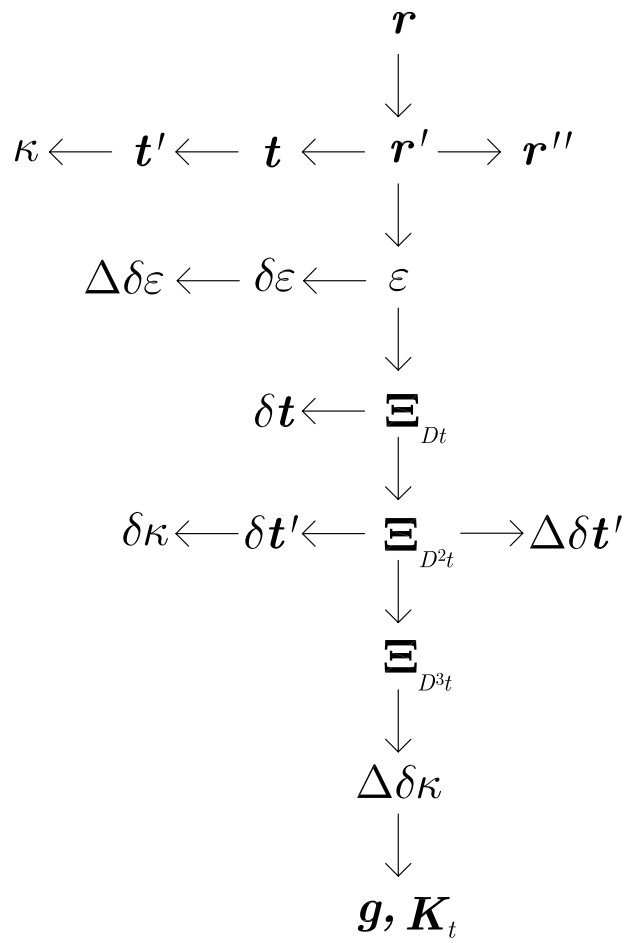


Figura 3.6: Organização esquemática das grandezas envolvidas.

Capítulo 4

Exemplos de aplicação

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se alguns exemplos de aplicação da formulação desenvolvida, com o objectivo de a validar e ilustrar as suas potencialidades. Em todos os casos considera-se uma viga em consola de aço ($E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$), com 2 metros de comprimento e uma secção transversal quadrada com 0,1 metros de lado (ver figura 4.1). Consideram-se apenas cargas pontuais, aplicadas no centro de gravidade da extremidade livre. Como cada elemento finito possui quatro graus de liberdade por nó (o deslocamento perpendicular ao eixo da viga r_1 , a derivada do deslocamento perpendicular ao eixo da viga r'_1 , o deslocamento segundo o eixo da viga r_3 e a derivada do deslocamento segundo ao eixo da viga r'_3), a discretização da viga implica $4(n + 1)$ graus de liberdade, sendo n o numero de elementos finitos considerados. A viga é discretizada num número de elementos de igual comprimento. O encastramento é modelado mediante a eliminação de r_1 , r'_1 e r_3 .

Os resultados obtidos através da formulação proposta são comparados com resultados analíticos e com resultados obtidos com o programa de elementos finitos ADINA (Bathe, 2011), utilizando um elemento finito de barra Hermiteano co-rotacional.

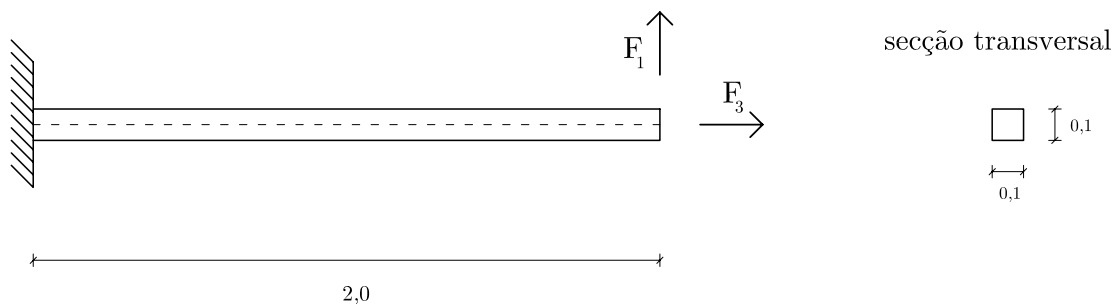


Figura 4.1: Viga em consola dos exemplos de aplicação.

4.2 Tracção simples

No primeiro exemplo considera-se a actuação de uma carga axial F_3 ($F_1 = 0$). Neste caso tem-se $r_3 = \frac{\Delta L}{L} X_3 + X_3$ e a formulação proposta fornece a solução analítica

$$\varepsilon = (r'_3 - 1) = \frac{\Delta L}{L}, \quad (4.1)$$

$$F_3 = \int_{\Omega} P_{33} \, d\Omega = \int_{\Omega} E\varepsilon \, d\Omega = E\Omega \frac{\Delta L}{L}, \quad (4.2)$$

sendo, portanto, linear. Note-se que, caso se tivesse adoptado uma relação linear entre o tensor de deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}) e o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff (\mathbf{S}), $S_{33} = EE_{33}$ e tinha-se antes

$$E_{33} = (r'_3 - 1) + \frac{(r'_3 - 1)^2}{2} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2, \quad (4.3)$$

$$F_3 = \int_{\Omega} S_{33} \, d\Omega = \int_{\Omega} EE_{33} \, d\Omega = E\Omega \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \right), \quad (4.4)$$

uma solução que não é linear. Na figura 4.2 mostra-se uma comparação entre as duas soluções. Como é lógico, as diferenças apenas são significativas para deformações moderadas.

Por fim, refira-se que, no caso da flexão pura ($\kappa = \text{constante}$), a presente formulação fornece a Lei de Euler-Bernoulli,

$$M = \int_{\Omega} -P_{33}X_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} E\kappa X_1^2 \, d\Omega = EI\kappa, \quad (4.5)$$

o que também não acontece ao utilizar o par conjugado $E_{33} - S_{33}$.

4.3 Consola com uma força transversal

Neste caso a consola é sujeita a uma força F_1 ($F_3 = 0$). A consola é discretizada com 10 elementos finitos de igual comprimento (0,20 metros). Aplica-se a força numa serie de 30 incrementos (100 kN cada), até atingir o valor máximo de 3000 kN. As figuras, 4.3 e 4.4 representam respectivamente as trajectórias de equilibrio e a evolução das configurações deformadas obtidas. Constata-se que os resultados obtidos através da presente formulação são praticamente idênticos aos resultados fornecidos pelo programa ADINA. Como seria de esperar, neste caso as diferenças entre as soluções que consideram grandes deslocamentos e a solução linear (pequenos deslocamentos) são significativas (por exemplo, a solução linear não prevê deslocamentos axiais).

4.4 Consola com forças segundo X_1 e X_3

De forma a testar a aplicação da presente formulação num caso mais complexo, aplica-se na extremidade livre da consola o carregamento indicado na tabela 4.1. Note-se que a força muda de direcção (o que acontece quando a viga atinge aproximadamente os 45°). Também efectua-se uma análise variando o número de elementos finitos utilizados, discretizando a viga com 3, 5, 10 e 30 elementos. A tabela 4.2 apresenta os deslocamentos do centro de gravidade da extremidade livre da consola.

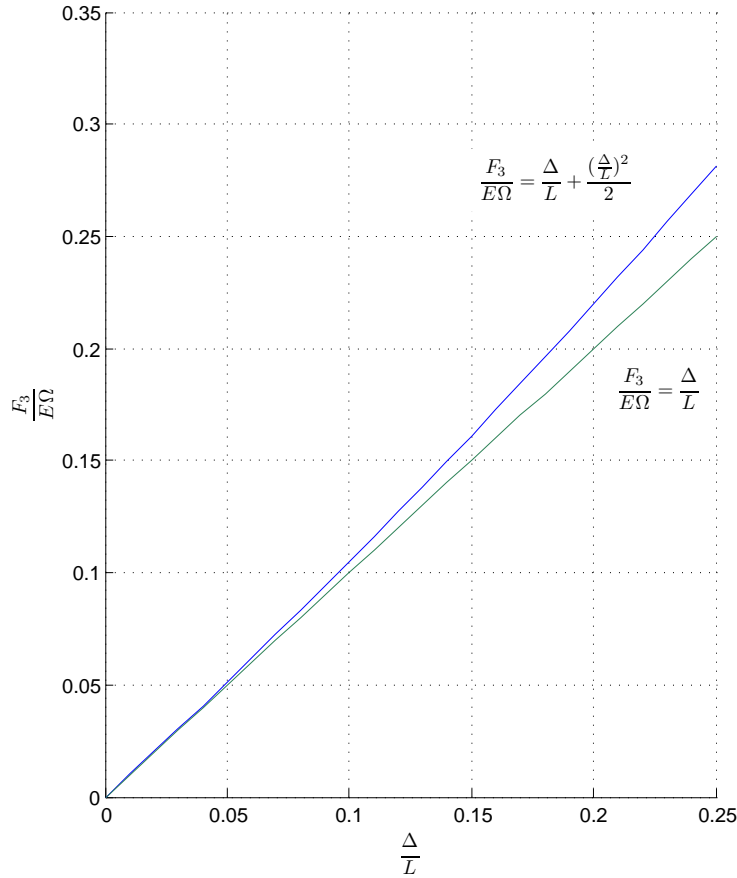


Figura 4.2: Comparação entre as duas soluções para diferentes relações constitutivas.

As figuras 4.5 e 4.6 mostram as trajetórias do centro de gravidade da extremidade livre da consola para uma análise com 3, 5, 10 e 30 elementos finitos. As figuras que demonstram a comparação, variando o número de elementos finitos, entre a formulação e o programa ADINA encontram-se no Anexo B. As configurações deformadas para uma análise com 30 elementos finitos são apresentadas na figura 4.7. A comparação entre as deformadas finais para 3, 5, 10 e 30 elementos finitos é demonstrada na figura 4.8. Os gráficos referentes a uma análise individual com 3, 5, 10 e 30 encontram-se mais uma vez no Anexo B.

Os resultados mostram que existe uma boa correspondência entre valores provenientes da formulação implementada e do programa ADINA. Analisando os resultados para uma discretização com 3, 5, 10 e 30 elementos, conclui-se que as maiores diferenças entre os valores obtidos pela presente formulação e os valores obtidos pelo programa ADINA ocorrem numa discretização com poucos elementos finitos (ver casos com 3 e 5 elementos). Nesses casos, a presente formulação apresenta melhores resultados (muito mais próximos da solução com 30 elementos finitos), mesmo com apenas 3 elementos.

Deslocamentos segundo X_3			
F(kN)	Presente formulação	ADINA	Solução linear
100	-0,0075	-0,0075	0
500	-0,1526	-0,1524	0
1000	-0,4006	-0,4002	0
1500	-0,6022	-0,6019	0
2000	-0,7535	-0,7532	0
2500	-0,8687	-0,8685	0
3000	-0,9590	-0,9589	0

Deslocamentos segundo X_1			
F(kN)	Presente formulação	ADINA	Solução linear
100	0,1589	0,1589	0,1600
500	0,6981	0,6983	0,8000
1000	1,0896	1,0904	1,6000
1500	1,2946	1,2958	2,4000
2000	1,4139	1,4155	3,2000
2500	1,4909	1,4927	4,0000
3000	1,5447	1,5467	4,8000

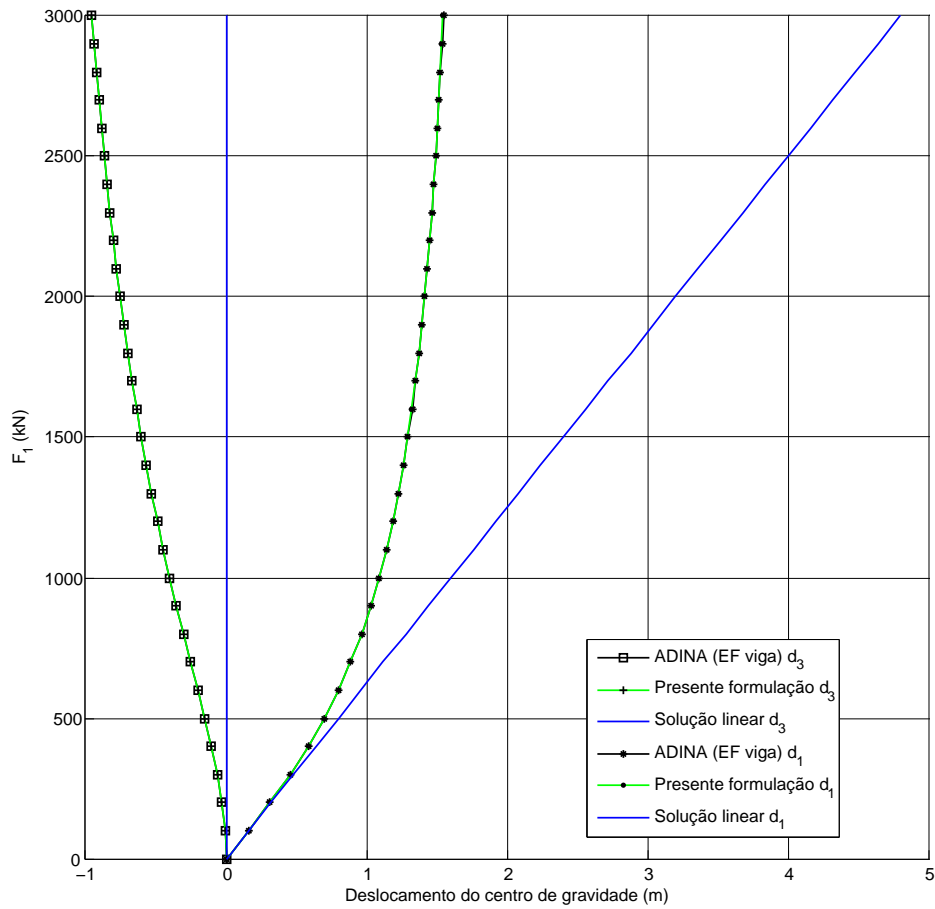


Figura 4.3: Consola sujeita a força transversal: Deslocamentos do centro de gravidade da extremidade livre.

4.4. Consola com forças segundo X_1 e X_3

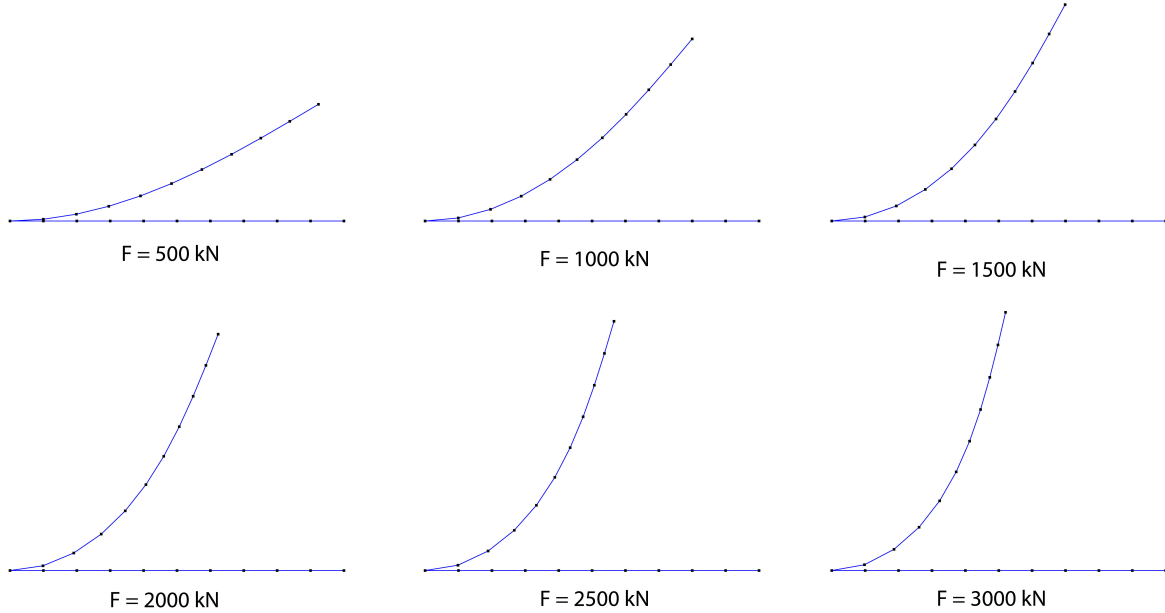


Figura 4.4: Configurações deformadas para uma força segundo X_1 de $F=500$ kN a $F=3000$ kN.

Tabela 4.1: Sequência de aplicação das forças

Incremento	F_3 (kN)	F_1 (kN)
1	0	500
2	0	1000
3	0	1500
4	-1000	1200
5	-2000	900
6	-3000	600
7	-4000	300
8	-5000	0
9	-6000	-300
10	-7000	-600

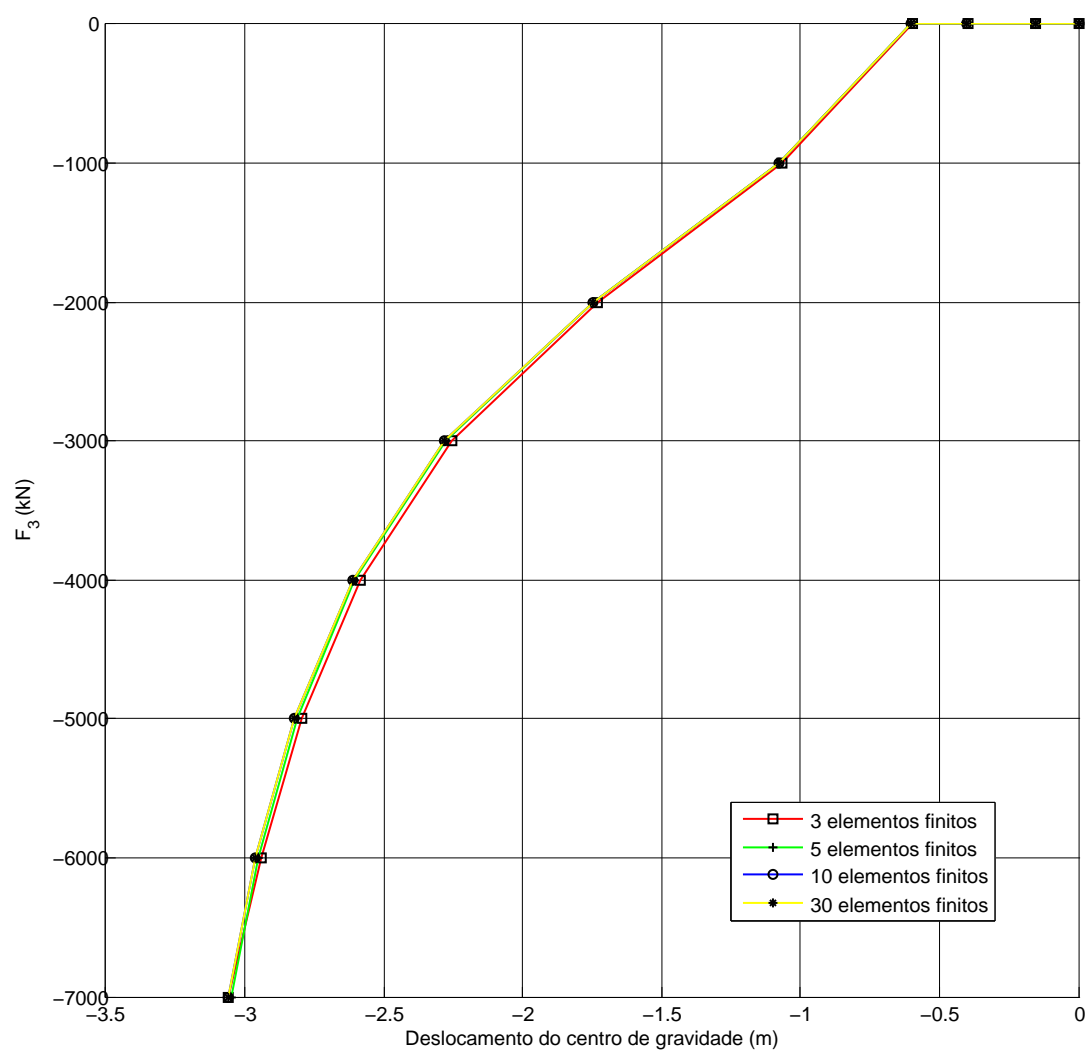


Figura 4.5: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para uma análise com 3, 5, 10 e 30 elementos finitos.

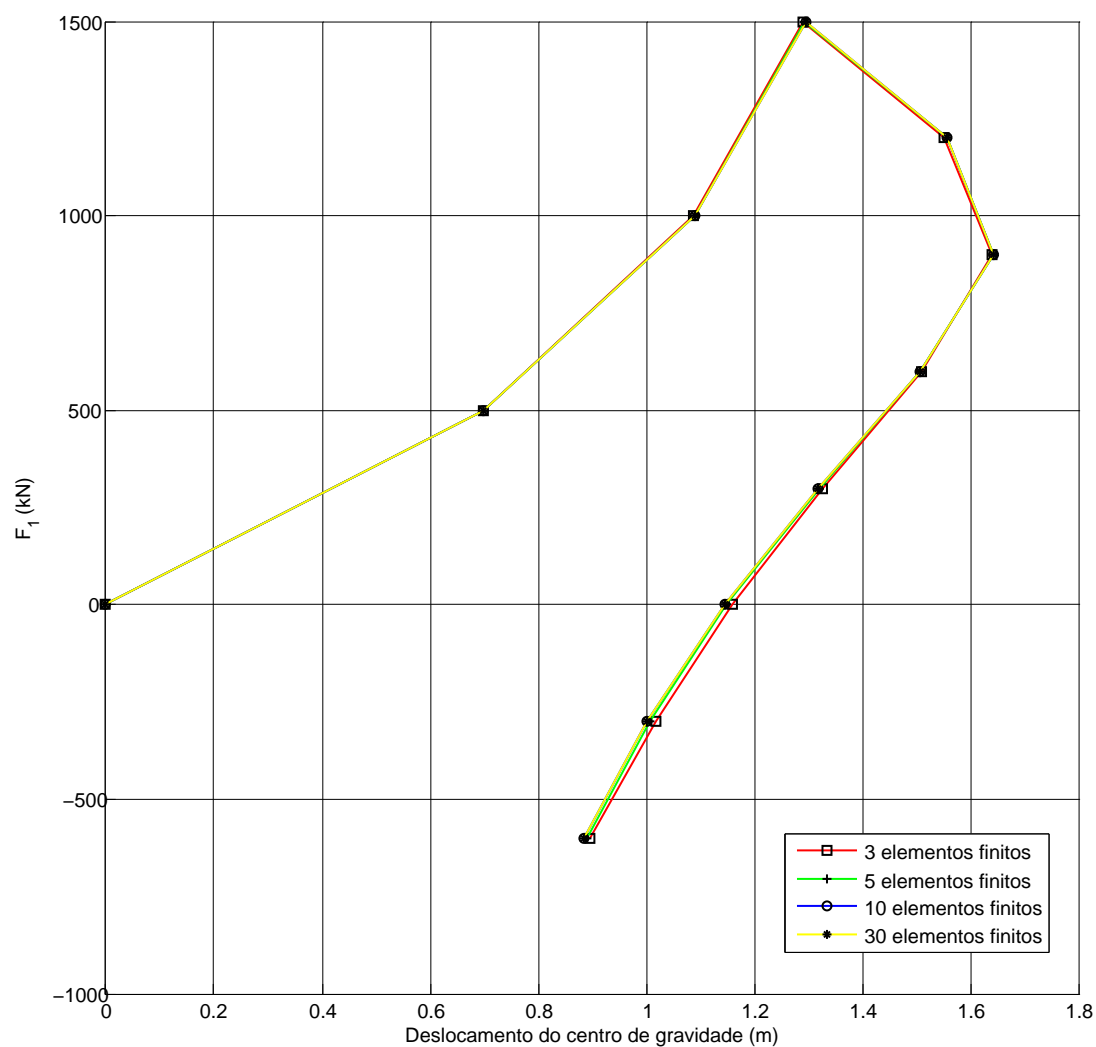


Figura 4.6: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para uma análise com 3, 5, 10 e 30 elementos finitos.

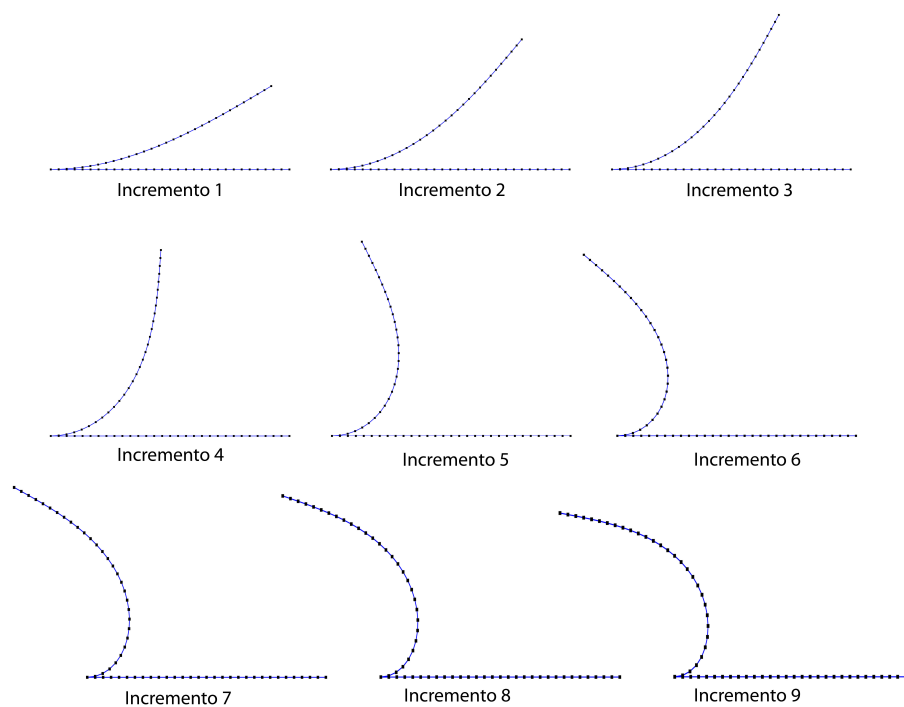


Figura 4.7: Configurações deformadas, incremento 1 a incremento 9

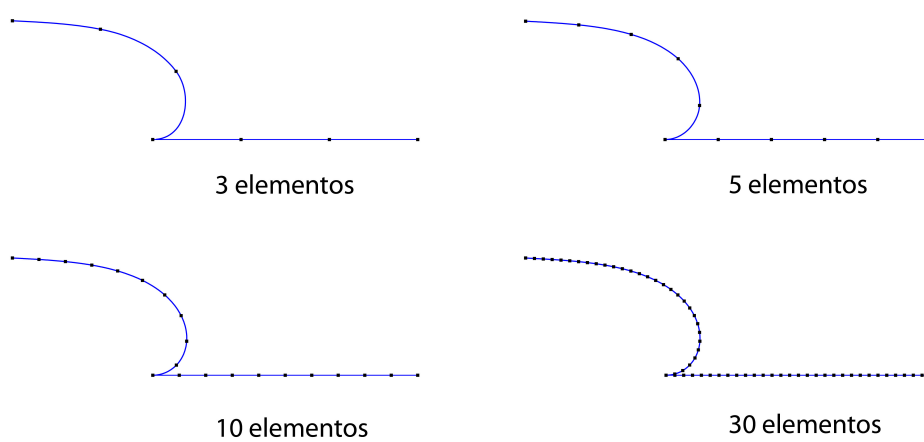


Figura 4.8: Deformadas finais para 3, 5, 10 e 30 elementos finitos

4.4. Consola com forças segundo X_1 e X_3

Tabela 4.2: Deslocamentos do centro de gravidade da extremidade livre (m) para a consola com forças com direcção variável

Deslocamentos segundo X_3								
Incremento	Formulação ADINA		Formulação ADINA		Formulação ADINA		Formulação ADINA	
	3 elementos		5 elementos		10 elementos		30 elementos	
1	-0,1523	-0,1501	-0,1526	-0,1517	-0,1526	-0,1522	-0,1526	-0,1526
2	-0,3990	-0,3970	-0,4005	-0,3992	-0,4006	-0,4002	-0,4006	-0,4006
3	-0,5992	-0,5995	-0,6019	-0,6010	-0,6022	-0,6019	-0,6022	-0,6021
4	-1,0684	-1,0631	-1,0760	-1,0715	-1,0771	-1,0756	-1,0771	-1,0770
5	-1,7310	-1,7219	-1,7464	-1,7382	-1,7493	-1,7465	-1,7494	-1,7490
6	-2,2547	-2,2458	-2,2756	-2,2658	-2,2805	-2,2769	-2,2808	-2,2804
7	-2,5834	-2,5743	-2,6056	-2,5947	-2,6124	-2,6081	-2,6129	-2,6123
8	-2,7936	-2,7827	-2,8125	-2,8005	-2,8208	-2,8160	-2,8214	-2,8208
9	-2,9412	-2,9255	-2,9506	-2,9376	-2,9601	-2,9548	-2,9610	-2,9603
10	-3,0592	-3,0314	-3,0491	-3,0349	-3,0595	-3,0537	-3,0605	-3,0598

Deslocamentos segundo X_1								
Incremento	Formulação ADINA		Formulação ADINA		Formulação ADINA		Formulação ADINA	
	3 elementos		5 elementos		10 elementos		30 elementos	
1	0,6973	0,7008	0,6980	0,6990	0,6981	0,6980	0,6981	0,6981
2	1,0871	1,0990	1,0893	1,0928	1,0896	1,0904	1,0896	1,0896
3	1,2910	1,3097	1,2942	1,2997	1,2946	1,2958	1,2946	1,2947
4	1,5520	1,5754	1,5568	1,5633	1,5574	1,5588	1,5574	1,5576
5	1,6392	1,6745	1,6421	1,6530	1,6426	1,6451	1,6426	1,6429
6	1,5101	1,5568	1,5078	1,5232	1,5073	1,5111	1,5073	1,5077
7	1,3273	1,3833	1,3196	1,3384	1,3178	1,3227	1,3177	1,3182
8	1,1602	1,2256	1,1488	1,1704	1,1457	1,1513	1,1454	1,1461
9	1,0182	1,0951	1,0067	1,0307	1,0022	1,0086	1,0018	1,0026
10	0,8947	0,9882	0,8899	0,9162	0,8840	0,8911	0,8835	0,8844

Capítulo 5

Conclusões e desenvolvimentos futuros

5.1 Conclusões

No presente trabalho implementou-se um elemento finito baseado numa formulação de vigas geometricamente exacta para o caso plano, considerando grandes deslocamentos e rotações finitas. Esta formulação é baseada na hipótese de Bernoulli, sendo portanto insensível ao fenómeno de retenção por corte. Os exemplos apresentados permitiram validar a formulação/implementação e concluir que conduz a resultados muito precisos com um número reduzido de elementos finitos, mesmo quando ocorrem grandes deslocamentos.

Quanto à implementação computacional, a escolha de uma linguagem de programação interpretada, com menor velocidade de cálculo, não dificultou a obtenção dos resultados graças a uma correcta implementação das operações matemáticas envolvidas e a uma organização hierárquica das grandezas necessárias.

5.2 Desenvolvimentos futuros

Os resultados obtidos perspectivam uma grande margem de progressão para formulações deste tipo. Assim, o presente trabalho pode servir como ponto de partida para um conjunto de novos desenvolvimentos, dos quais se destacam os seguintes:

1. vigas com inércia variável (secção variável);
2. secções transversais deformáveis;
3. estruturas reticuladas;
4. leis constitutivas mais gerais (e.g., elastoplásticas);
5. acções dinâmicas.

Por fim, salienta-se que, para levar a cabo estes desenvolvimentos, será vantajoso efectuar uma implementação numa linguagem de programação mais eficaz do ponto de vista da velocidade de cálculo.

Bibliografia

- Azevedo, A.F.M., 2003. *Método dos Elementos Finitos* (1.^a Edição). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.
- Bathe, K. J., 2011. *ADINA System* (versão 8.7.3), ADINA R&D Inc.
- Boyer, F. e Primault, D., 2004. Finite Element of Slender Beams in Finite Transformations: A Geometrically Exact Approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 59, no. 5, pp. 669-702.
- Cardona, A. e G rardin, M., 1988. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:2403-2438.
- Ferreira, A. J. M., 2009. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*. Springer.
- Gon alves, R., Ritto-Corr a, M., Camotim, D., 2010. A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24), pp. 1627-1643, 2010.
- Gon alves, R., Ritto-Corr a, M., Camotim, D., 2011. Incorporation of wall finite relative rotations in a geometrically exact thin-walled beam element. *Computational Mechanics*, 48(2), pp. 229-244.
- Ibrahimbegovi , A., 1995. Finite element implementation of Reissner's geometrically nonlinear beam theory: threedimensional curved beam finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122:11-26.
- Kapania, R. K. e Li, J., 2003a. On a geometrically exact curved/twisted beam theory under rigid cross-section assumption. *Computational Mechanics*, 30:428-443.
- Kapania, R. K. e Li, J., 2003b. A formulation and implementation of geometrically exact curved beam elements incorporating finite strains and finite rotations. *Computational Mechanics*, 30:444-459.
- Reissner, E., 1972. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 23:795-804.
- Reissner, E., 1973. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics*, 52:87-95.
- Simo, J. C., 1985. A Finite-Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:55-70.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L., 1986. Three-dimensional finite strain model - Part II: computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:79-116.

Bibliografia

- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L., 1991. A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsionwarping deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 27(3):371–393.
- The MathWorks Inc., 2011. *MATLAB* (versão 7.12.0.), Natick, Massachusetts, Estados Unidos da América.
- Zlotnik, S. e Díez, P., 2010. Assembling sparse matrices in MATLAB. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 26 (6) 760-769.
- Zupan, D. e Saje, M., 2004. Rotational invariants in finite element formulation of three-dimensional beam theories. *Computers and Structures*, 82:2027–2040.

Anexo A

Código das rotinas desenvolvidas no MATLAB

A.1 Processo incremental/iterativo

```
%Rotina Principal
```

```
%nl.m
```

```
%%Estrutura
```

```
    %Consola
```

```
    %Metodo dos Elementos finitos
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Dados
```

```
% Número de elementos
```

```
    numeroElementos=10;
```

```
    %Geometria
```

```
        %Area da seccao transversal
```

```
        S = 0.1*0.1;
```

```
    %Comprimento de cada elemento
```

```
        L = 2/numeroElementos;
```

```
    %Inercia
```

```
        I = (0.1^4)/12;
```

```
    %Material
```

```
        %Modulo de Elasticidade
```

```
        E = 2e8;
```

Anexo A. Código das rotinas desenvolvidas no MATLAB

```
%Número de incrementos
n_inc = 5;

%Incremento
inc = 1;

%Condições de apoio
Gdl_apoio = [1 2 3]';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Cálculos auxiliares
%Versores dos eixos dos materiais
E1 = [1;0;0];
E2 = [0;1;0];
E3 = [0;0;1];

Ngauss=3;

Gauss=[-0.7745966692 0 0.7745966692 ; 0.5555555556 0.8888888889 0.5555555556];

x3 = sym('x3');

%Funções Hermite

H_1 = 2*(x3/L)^3 - 3*(x3/L)^2 + 1;

H_2 = L*((x3/L)^3 - 2*(x3/L)^2 + x3/L);

H_3 = -2*(x3/L)^3 + 3*(x3/L)^2;

H_4 = L*((x3/L)^3 - (x3/L)^2);

%phi

phi_i = [ diff(H_1,x3) diff(H_2,x3) 0 0 diff(H_3,x3) diff(H_4,x3) 0 0 ; ...
0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 diff(H_1,x3) diff(H_2,x3) 0 0 diff(H_3,x3) diff(H_4,x3); ...
diff(H_1,2,x3) diff(H_2,2,x3) 0 0 diff(H_3,2,x3) diff(H_4,2,x3) 0 0 ; ...
0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 diff(H_1,2,x3) diff(H_2,2,x3) 0 0 diff(H_3,2,x3) diff(H_4,2,x3)];

phi_l_i = [ H_1 H_2 0 0 H_3 H_4 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 H_1 H_2 0 0 H_3 H_4 ];

%Número de elementos

numeroNos=numeroElementos+1;

Gdl=4;
```

```

TGdl=Gdl*numeroNos;

Gdl_activos=setdiff([1:TGdl]',[Gdl_apoio]);

Resultados_finais=zeros(n_inc*TGdl,2); % Iniciar matriz

vforca=zeros(TGdl,1);

deslocamentos=zeros(TGdl,1);

for e=1:n_inc;

    Gdl_inc=[(1+TGdl*(e-1):TGdl+TGdl*(e-1))];

%Inicio

    vforca(TGdl-3)=vforca(TGdl-3) + inc;
    Qet = zeros(TGdl,1);

%Ciclo

    G = 1;

    [rigidez,Qet]=calculorq(deslocamentos,TGdl,S,L,I,E,numeroElementos,phi_i,phi_l_i,x3, ...
    E2,Ngauss,Gauss);

    while G > 0.001;

        G_1=vforca-Qet;
        G_1(Gdl_apoio)=0;

        [var_deslocamentos]=calculod(rigidez,TGdl,G_1,Gdl_apoio,Gdl_activos);
        deslocamentos=deslocamentos + var_deslocamentos;

        [rigidez,Qet]=calculod(deslocamentos,TGdl,S,L,I,E,numeroElementos,phi_i,phi_l_i,x3 ...
        ,E2,Ngauss,Gauss);

        G=norm(vforca(Gdl_activos)-Qet(Gdl_activos))

        graf1

    end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
        Resultados_finais(Gdl_inc,1) = deslocamentos;
        Resultados_finais(Gdl_inc,2) = vforca;
end
```

A.2 Cálculo da matriz de rigidez elementar e do vector das forças desequilibradas elementar

```
%Sub-rotina

%calculorq.m

function[rigidez,Qet]=calculod(deslocamentos,TGdl,S,L,I,E,numeroElementos,phi_i, ...
phi_l_i,x3,E2,Ngauss,Gauss);

    rigidez = zeros(TGdl);

    Qet = zeros(TGdl,1);

    for e=1:numeroElementos;

        Gdl_elemento=(1+4*(e-1):8+4*(e-1));

        desl_element = deslocamentos(Gdl_elemento);

        r_i = phi_l_i*desl_element + [0 ; 0 ; x3];

        dr_i = diff(r_i,x3);

        d2r_i = diff(r_i,x3,2);

        Ke = zeros(8);
        Qe = zeros(8,1);

    %Integração numérica

    for i=1:Ngauss;

        a=(1+Gauss(1,i))*L/2; % coordenadas do pto

        phi = subs(phi_i,x3,a);
        dr = subs(dr_i,x3,a);
        d2r = subs(d2r_i,x3,a);
```



```

%Extensão do eixo
Ep = norm(dr)-1;

%Vector tangente à curva
t = dr / norm(dr);

%Derivada de t
dt = (eye(3) - t*transpose(t))*(d2r / norm(dr));

%Calculo de (^) tensor de rotação - rot
%rot = t*transpose(E3) + E2*transpose(E2) + (skew(E2)*t)*transpose(E1);

%Calculo de k
k = transpose((skew(E2)*t))*dt;

%Calculo da variação de E - vE
vEp_vdr = (transpose(dr)/norm(dr));

%Calculo da variação de k - vk
vk_vdr = (transpose(skew(dt)*E2)*(eye(3)-t*transpose(t))*(1/norm(dr))) ...
+ transpose(skew(E2)*t)*(-(transpose(d2r)*t)/(norm(dr))^2*(eye(3) ...
-t*transpose(t)) - ((t*transpose(d2r))/(norm(dr))^2*(eye(3) ...
-t*transpose(t)) - (dt*transpose(t))/(norm(dr))));

vk_vd2r = (transpose(skew(E2)*t)*(eye(3)-t*transpose(t))*(1/norm(dr)));

%Calculo do incremento da variação de E - incvk

incvE = (eye(3)-t*transpose(t))*(1/norm(dr));

%ksi

ksi_Dt = (eye(3) - t*transpose(t))/(norm(dr));

ksi_Ddt_1 = -(1/norm(dr))*(transpose(d2r)*t*ksi_Dt + t*transpose(d2r)*ksi_Dt + ...
dt*transpose(t)) ;

ksi_D2k = [ ksi_D2t(-skew(E2)*dt,dr,t,ksi_Dt) + ksi_Dt*(-skew(E2))*ksi_Ddt_1 + ...
ksi_Ddt_1*skew(E2)*ksi_Dt , ksi_Dt*(-skew(E2))*ksi_Dt ; ksi_Dt*(skew(E2))*ksi_Dt, ...
zeros(3) ] + ksi_D2dt(skew(E2)*t,dr,ksi_Dt,d2r,ksi_Ddt_1,t,dt);

ksi_DEp = [ vEp_vdr , zeros(1,3) ];

ksi_Dk = [ vk_vdr , vk_vd2r ];

ksi_D2Ep = [ incvE , zeros(3) ; zeros(3) , zeros(3) ];

```

Anexo A. Código das rotinas desenvolvidas no MATLAB

```
Peso=Gauss(2,i);

Keponto=Peso*L/2*(transpose(phi)*(E*S*(transpose(ksi_DEp)*ksi_DEp + ...
    Ep*ksi_D2Ep) + E*I*(transpose(ksi_Dk)*ksi_Dk + k*ksi_D2k))*phi);
Qeponto=Peso*L/2*(transpose(phi)*(E*S*Ep*transpose(ksi_DEp) + ...
    E*I*k*transpose(ksi_Dk)));

Ke=Ke+Keponto;
Qe=Qe+Qeponto;
end

rigidez(Gdl_elemento,Gdl_elemento) = rigidez(Gdl_elemento,Gdl_elemento) + Ke;

Qet(Gdl_elemento,1) = Qet(Gdl_elemento,1) + Qe;

end
```

A.3 Cálculo dos deslocamentos nodais

```
%Sub-rotina

%calculod.m

function [deslocamentos]=calculod(rigidez,TGdl,vforca,Gdl_apoio,Gdl_activos)

% Solução

U=rigidez(Gdl_activos,Gdl_activos)\vforca(Gdl_activos);

deslocamentos=zeros(TGdl,1);

deslocamentos(Gdl_activos)=U;
```

A.4 Funções auxiliares

```
%Calculo de ksi_D2dt
```

```
function [ksi_D2dt] = ksi_D2dt(a,dr,ksi_Dt,d2r,ksi_Ddt_1,t,dt)

ksi_D2dt = -(1/norm(dr))*[ksi_Dt*(a*transpose(d2r)+d2r*transpose(a))*ksi_Dt ...
+ (t*transpose(a))*ksi_Ddt_1 + ksi_Ddt_1*a*transpose(t) + (transpose(dt)*a)*ksi_Dt ...
+ ksi_D2t(a,dr,t,ksi_Dt)*(transpose(t)*d2r)+ksi_D2t(d2r,dr,t,ksi_Dt)*(transpose(a)*t) ...
, t*transpose(a)*ksi_Dt + ksi_Dt*(a*transpose(t) + eye(3)*(transpose(t)*a)) ; ...
transpose(t*transpose(a)*ksi_Dt + ksi_Dt*(a*transpose(t) + eye(3)*(transpose(t)*a))),...
zeros(3) ];
```

%Calculo de ksi_D2t

function [ksi_D2t] = ksi_D2t(a,dr,t,ksi_Dt)

ksi_D2t = -(1/norm(dr))*(t*transpose(a)*ksi_Dt + ksi_Dt*a*transpose(t) + ...
ksi_Dt*(transpose(t)*a));

%Calculo de skew

function [skew] = skew(a)

skew = [0 -a(3) a(2) ; a(3) 0 -a(1) ; -a(2) a(1) 0];

Anexo B

Figuras referentes ao terceiro exemplo analisado

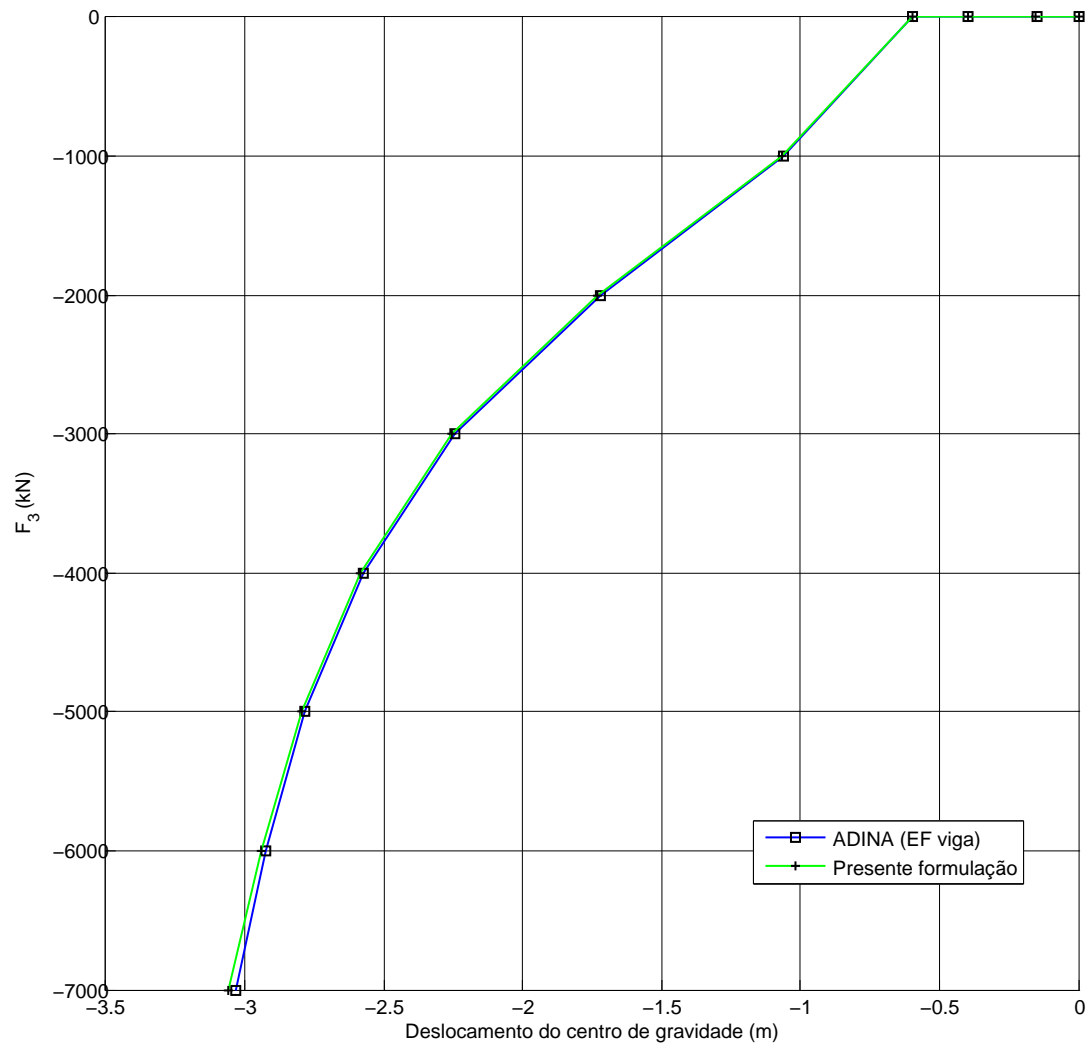


Figura B.1: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 3 elementos finitos.

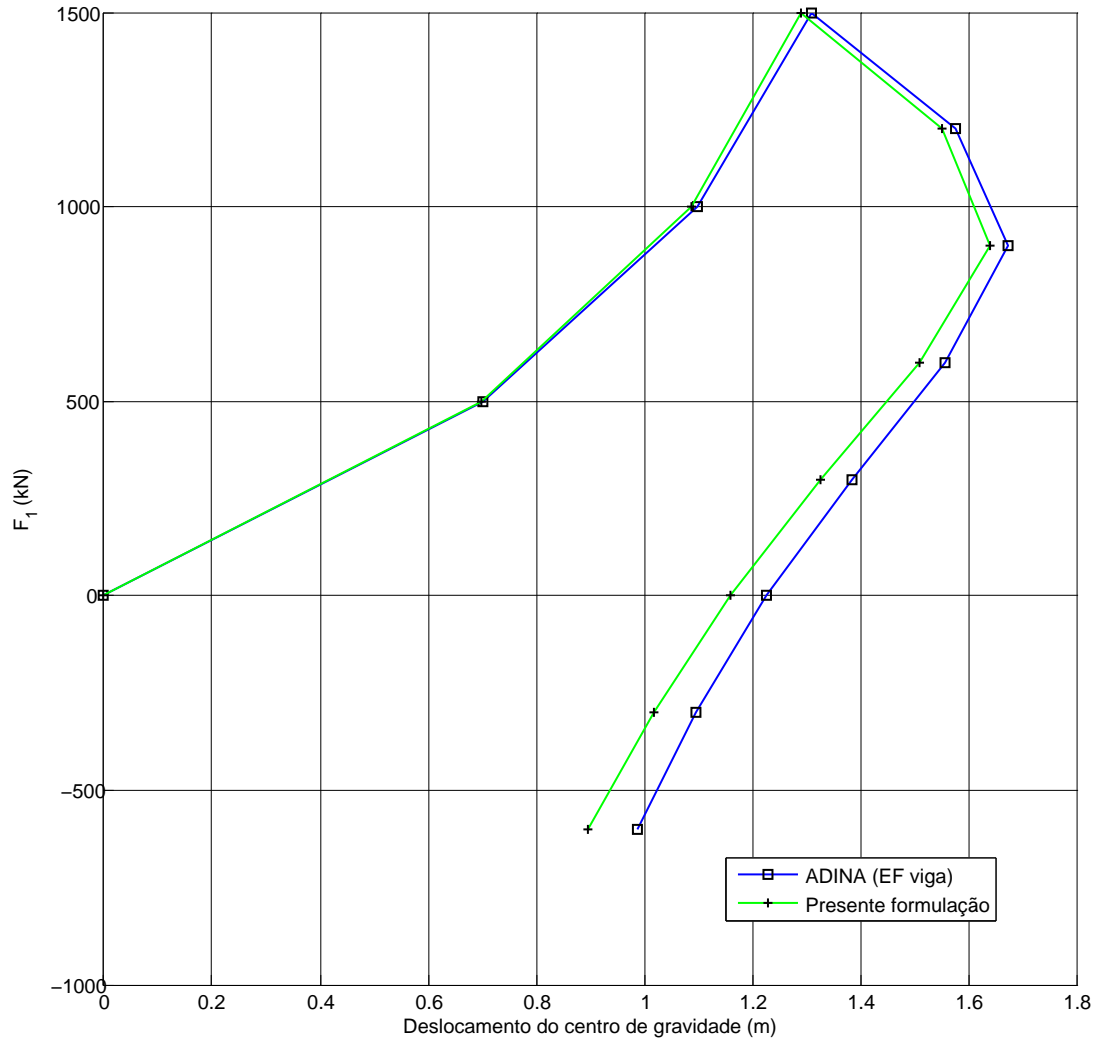


Figura B.2: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 3 elementos finitos.

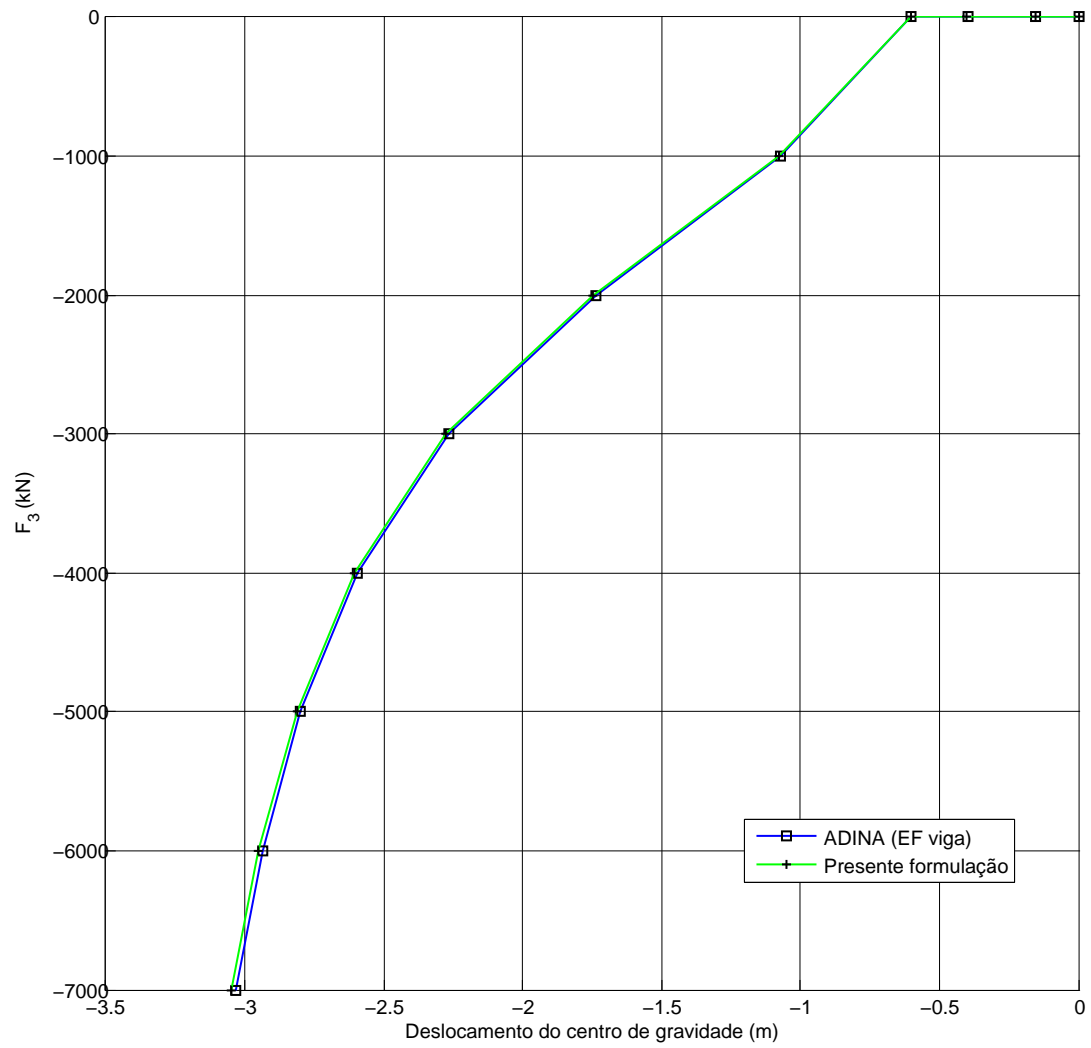


Figura B.3: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 5 elementos finitos.

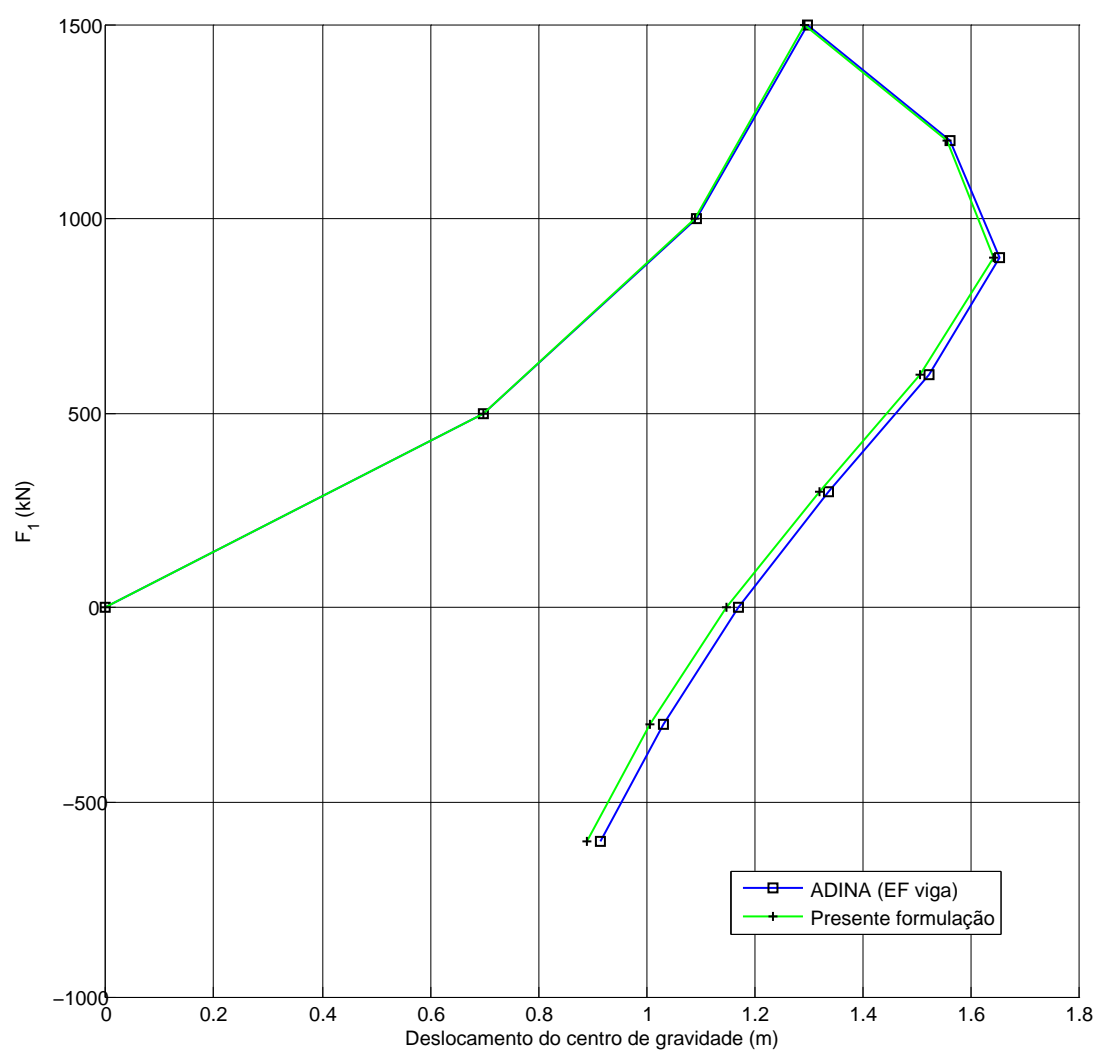


Figura B.4: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 5 elementos finitos.

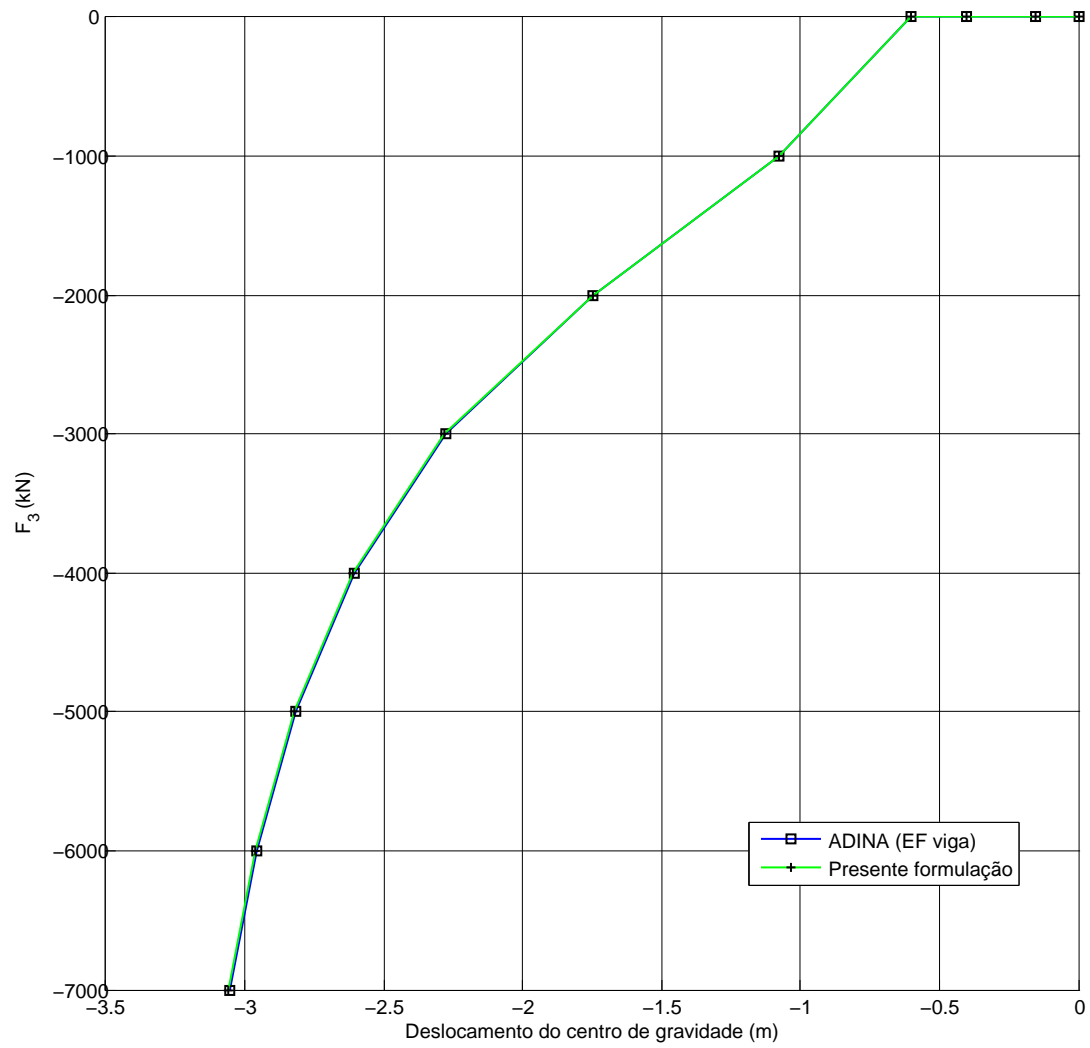


Figura B.5: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 10 elementos finitos.

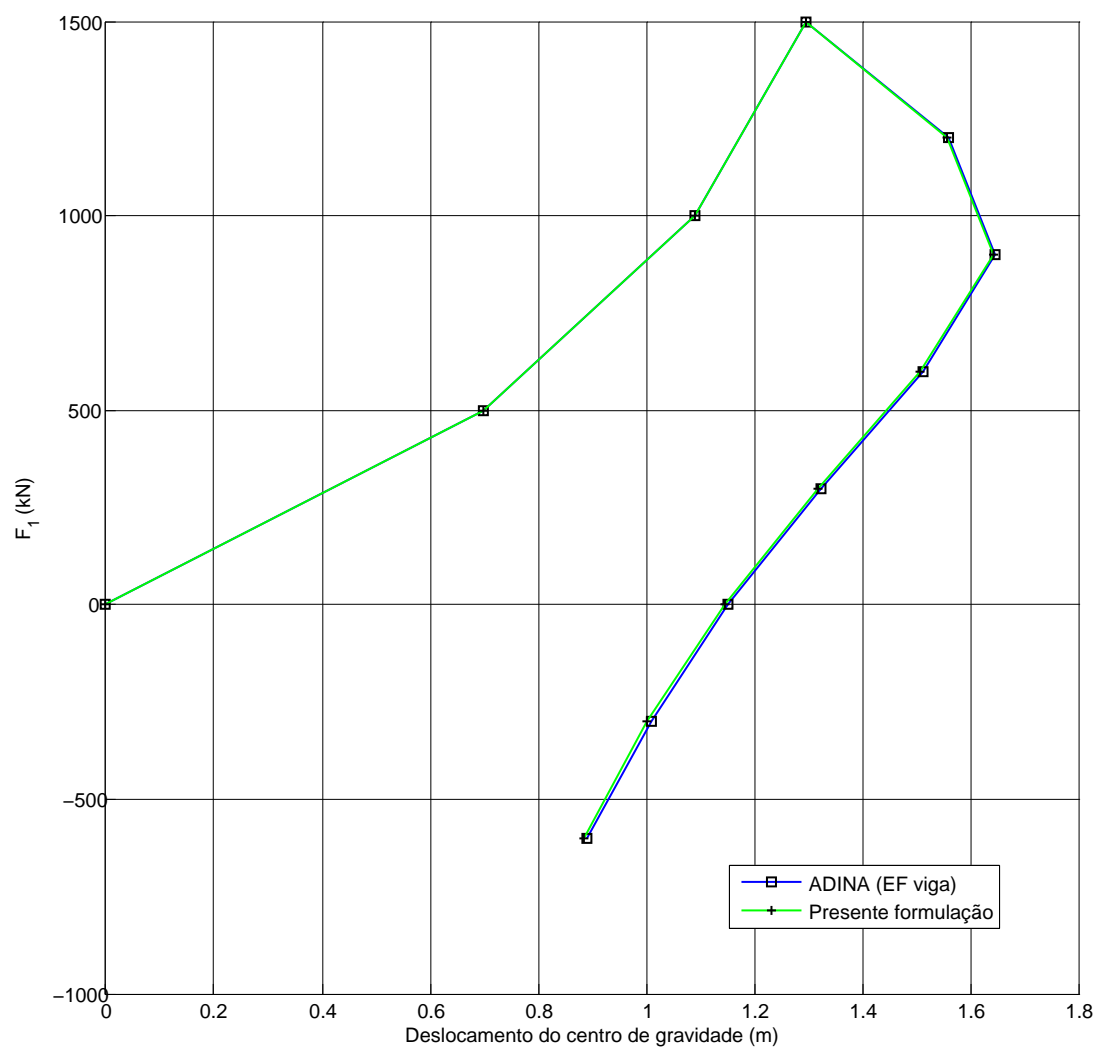


Figura B.6: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 10 elementos finitos.

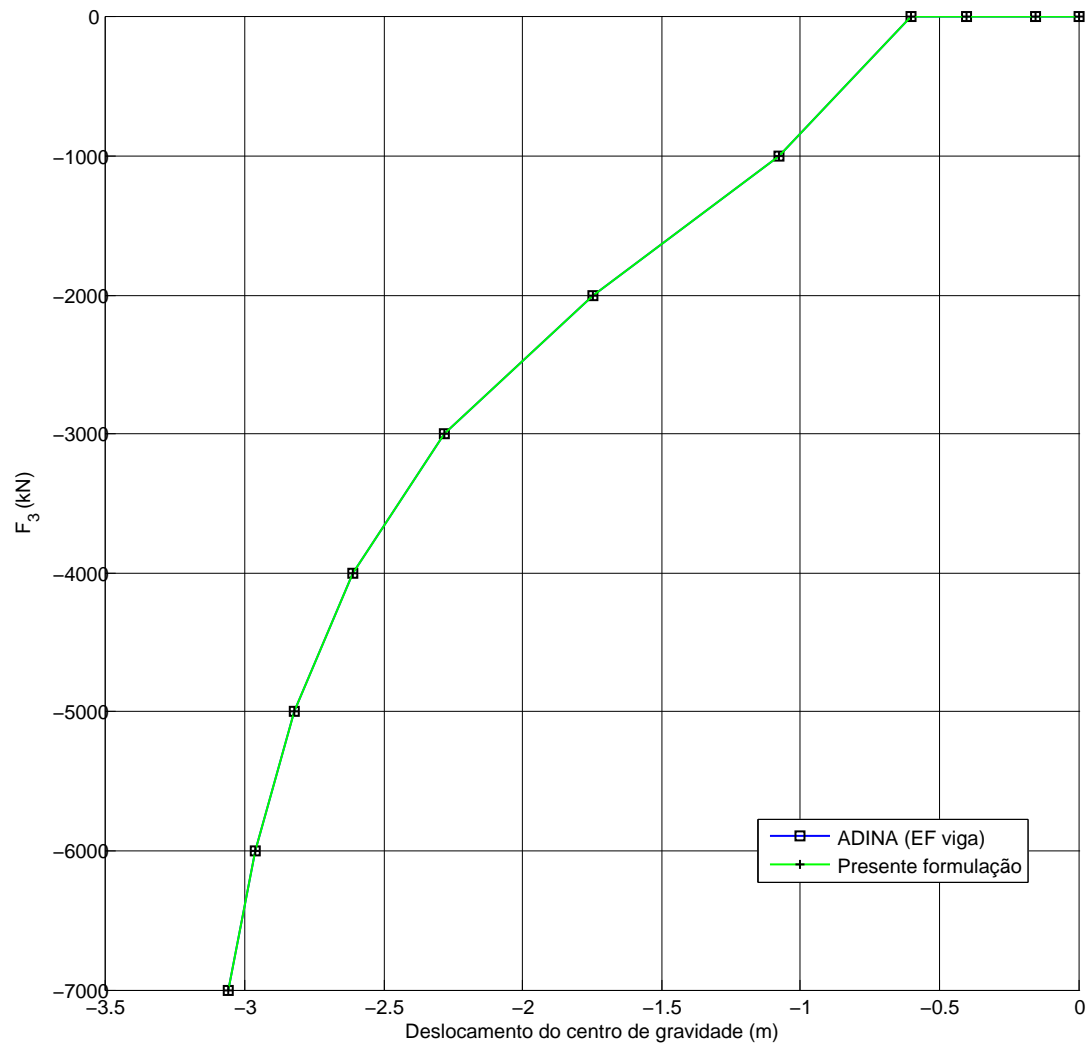


Figura B.7: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_3 , para o terceiro exemplo com 30 elementos finitos.

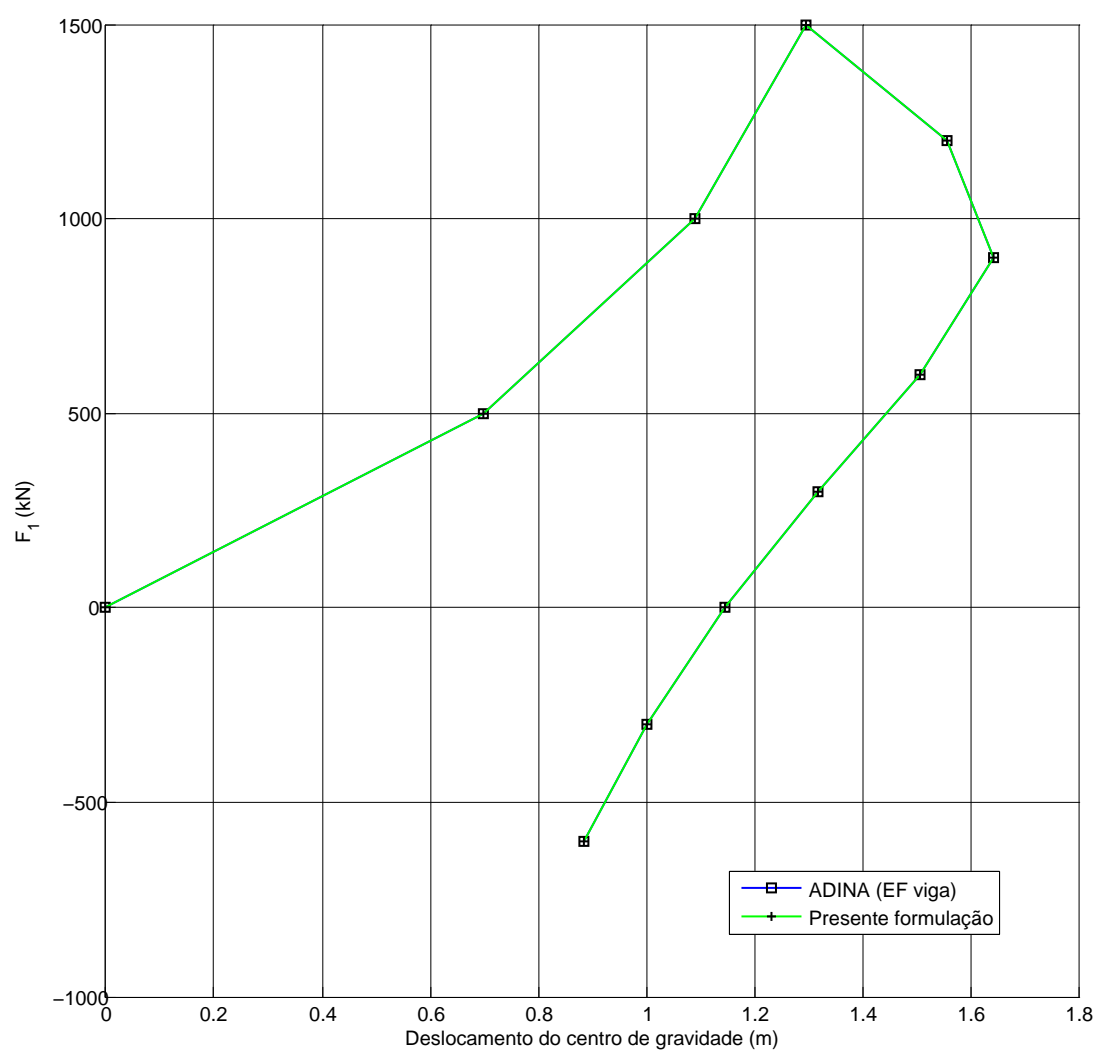


Figura B.8: Trajectória do centro de gravidade da extremidade livre da consola segundo o eixo X_1 , para o terceiro exemplo com 30 elementos finitos.